Exposé : Une incursion en théorie des modèles.

Notes de l'exposé du 12/04/2016 à l'IES, à la journée des doctorants.

Résumé : Nous ferons un (tout) petit tour d'horizon du paysage modèle-théorique actuel. On s'attardera à comprendre la notion d'ensemble définissable dans une structure ou une théorie. Ceci nous permettra d'introduire 3 contraintes de nature combinatoire sur une théorie : la stabilité, la simplicité et la dépendance (ou NIP-itude). On mettra l'accent sur les interactions (fructueuses) entre théorie des modèles et théorie des corps, et on conclura avec ce qui est su et ce qu'il reste encore à savoir.

Pour présenter la théorie des modèles, il faut déjà savoir ce qu'est un modèle, ainsi qu'une théorie. (Dans "théorie des modèles" le sens du mot "théorie" n'est pas celui qu'il revêt en théorie des modèles, mais passons sur ce menu détail qui prendra tout son sens en section 4.)
Les 4 prochaines sections vont servir à définir ce qu'est un modèle, ce qu'est une théorie et ce qu'est un ensemble définissable. Ce n'est qu'après que l'on commencera à rigoler.

1 - Structure.

Une structure en théorie des modèles est exactement la même chose que dans le reste de l'univers mathématique. Les théoriciens des modèles ont simplement eu l'idée formidable d'écrire ce que tout le monde pensait.

Une structure $\mathcal{M}$ est la donnée d'un ensemble M (le domaine de la structure), d'un ensemble $\mathcal{R}$ de relations sur M ($R \in \mathcal{R}$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $R \subseteq M^k$), d'un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions (fonction $f \in \mathcal{F}$ totale $f : M^k \to M$) et d'un ensemble $\mathcal{C}$ de constantes, i.e. d'un ensemble d'éléments fixés : $\mathcal{C} \subseteq M$.

Quelques exemples : (1) Groupes, anneaux, corps
$(G, \cdot, 1)$, $(A, +, -, \cdot, 0, 1)$, $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$
on peut aussi se donner $(A, +, \cdot)$ ou $(G, \cdot)$.
⚠ Les fonctions d'une structure doivent être totales. Donc on ne peut à priori pas se donner $\cdot^{-1}$, mais pourquoi ne pas définir $0^{-1} = 0$ et disposer de la structure $(K, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$.

Le même objet donne à priori des structures différentes, mais intuitivement, $(G,+,0)$ et $(G,+,-,0)$ disent la même structure. La théorie des modèles permettra de mettre un sens formel à "disent la même structure" ; avec les notions de définissabilité et d'interprétabilité.

(2) Ensemble avec relation binaire :

(2.1) <u>Ensembles linéairement ordonnés</u> : $(\mathbb{Q}, \leq)$; $(⟦0,n⟧, \leq)$, $(\mathbb{N}+\mathbb{Z}, \leq)$, $(2^{\omega}, \leq)$.

(2.2) <u>Graphes</u> : (Γ, R) $\Gamma = \{\text{points}\}$ $xRy \Leftrightarrow$ il y a une arête entre les 2.

<u>Graphes bipartites</u> : 2 sortes $((A,B),R)$

(2.3) <u>Arbres</u> : $(T, \leq)$ ensemble partiellement ordonné tel que $\forall x \in T$, $s_x = \{y,\ y < x\}$ est linéairement ordonné.

(3) <u>Actions</u> :

(3.1) Espaces vectoriels : $M = V \dot\cup K$
V et K sont 2 prédicats, V est un groupe et K est un corps. On a une fonction $m : V \times K \to V$
$$\mathcal{M} = (M, (+_K, -_K, \cdot_K, 0_K, 1_K), (+_V, -_V, 0_V), V, K, m)$$
<u>Plus simple</u> : univers : V et $\forall \lambda \in K$ on lit
$m_\lambda : V \to V$, $x \mapsto \lambda x$. La structure est $(V, +, -, 0, (m_\lambda)_{\lambda \in K})$

(3.2) De même avec les modules, les algèbres...

(3.3) Actions de groupes.

(4) Géométries : $\mathcal{M} = (\mathcal{P} \cup \mathcal{D}, i)$ l'univers est à la fois des points et des droites, i est une relation binaire, la relation d'incidence.
$i(p, \mathcal{D})$ ssi $p \in \Delta$.
Le plan peut être projectif, affine, desarguien, pappusien etc.

(5) Les corps enrichis :

(5.1) $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, \leq)$, $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, \leq, \exp)$

Soit $A_n = \left\{ \tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,1[^n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \ f \text{ analytique sur } \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Alors $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, \leq, A_n)$ est une structure.

(5.2) Corps valués : (K, v) : $v : K \to \Gamma$

$(\mathbb{K}, +, -, \cdot, 0, 1, v, \Gamma, k)$

on en pourrait $x \mid y$ ssi $v(x) \leq v(y)$

$(\mathbb{K}, +, -, \cdot, 0, 1, \mid)$.

$\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p(t)$, ...

(5.3) Corps différentiels : $\partial : K \to K$ une différentielle.

exemples · $(\mathbb{K}(X), +, -, \cdot, 0, 1, \partial)$
· $(\mathbb{K}((X))$ ——— $)$
· Si $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe
$\mathcal{M} = \mathcal{M}(U) = \{f$ et méromorphes sur $U\}$
muni de la différentielle complexe

(5.4) Corps aux différences : $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ un automorphisme, la structure $(\mathbb{K}, +, -, \cdot, 0, 1, \sigma)$.

(5.5) Corps séparablement clos

(5.6) Corps pseudo-finis

(5.7) Corps pseudo-algébriquement clos (PAC)

(6) Structure un peu étrange :

(6.1) $(\mathbb{R}, <_1, \ldots, <_n)$ ensemble / corps muni plusieurs ordres.

(6.2) $(\mathbb{K}, v_1, \ldots, v_n)$ corps avec plusieurs valuations indépendantes.

(6.3) $(K, <_1, \ldots, <_n, v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ etc.

(7) <u>Les mal-aimés</u> :

(7.1) Algèbre de Boole sans atomes

(7.2) $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ l'arithmétique de Peano

(7.3) ZF la théorie des ensembles.

2 - Langage.

Quelle est la différence entre $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ et $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ sans encore $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, \leq)$, c'est le <u>langage</u> :

- <u>Langages différents</u> : $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, \leq)$
- <u>Même langage</u> : $(\mathbb{Z}, +, <)$ et $(\mathbb{Q}, \cdot, \leq)$

ensembles ordonnés, graphes, ordres ont tous le même langage : une relation binaire.

$(\mathbb{N}, s)$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot^{-1})$

⋮

Le <u>langage</u> de la structure (M, F, R, E) est "la donnée de F, R, E, arités des fonctions comprises" ; c'est la donnée de "une fonction d'arité 3 et 2 d'arité 7 et une relation d'arité 1".

<u>Formellement</u> : $\mathcal{L} = \{(\tilde{f}, k_f),\ f \in F\} \cup \{(\tilde{R}, k_R),\ R \in \mathcal{R}\}$
$\cup \{\tilde{c},\ c \in E\}$

où k_f, k_R est l'arité de f, R.

Plus que les défs, l'important est non de comprendre ce qu'est le langage d'une structure, mais ce que signifie que deux structures ont le même langage.

3_ Formules et ensembles définissables.

On construit ici de manière informelle ce que l'on appelle le langage des prédicats ou langage du premier ordre.

On se donne une structure $\mathcal{M} = (M, F, R, \mathcal{E})$.
Pour définir les formules de $\mathcal{M}$ on se donne des symboles de variables : $x_1, \dots, x_n, \dots, u, v, \dots, y, z, t, \dots$
On construit ensuite des phrases qui ont du sens avec :

- les fonctions de F que l'on applique aux variables (les termes)
- l'égalité "$=$" et les relations de R
- les connecteurs logiques : $\wedge, \vee, \neg, \to$
- les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, appliqués à des variables, et précisément les éléments du domaine M. On ne peut pas de quantifier sur les parties de M, que sur les éléments.

Exemple : Les formules dans $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, \leq)$.

- Termes : ce que l'on fait avec les fct les variables et les constantes : $x^2 + 2x + 1$; $P(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{Z}[X]$
- Formules atomiques : ce que l'on fait avec R et "$=$", ici $R = \{\leq\}$ et les termes : $x^2 + 2x + 1 = 0$; $2x - 3y = 3$; $P(x_1, \dots, x_n) \leq 7$; $z < 2$ (variable non-déf)
- Formules sans quantificateurs : ce que l'on fait avec les formules atomiques et $\wedge, \vee, \neg, \to$: $3x + 2 = 0 \to x = -2/3$; $P(x) = 0 \wedge x \neq 0$; ("mathé non-contradictoire") $(x = 7)$

• <u>Formule</u> : On quantifie la formule non quantifiée, la quantification s'applique alors sur tout $\mathbb{R}$

$\forall x \exists y \; x + y = 1$.

$x \geq 0 \iff \exists y \; x = y^2$

$\exists x \exists y \; x^2 + y^2 = 1$

$\exists x \; x^2 + y^2 = 1$: c'est la projection du cercle sur une droite.

Une formule de $\mathcal{M} = (M, R, F, \mathcal{E})$ est donc une phrase construite avec bon sens à partir de $\{ \{\text{var}\}, F, R, \mathcal{E}, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \forall, \exists \}$; avec les quantificateurs qui parcourent toute la structure.

On remarque à présent que lorsque l'on construit une formule, la chose formelle que l'on utilise est le <u>langage</u> de la structure et qu'une formule de $(\mathbb{R}, +, -)$ peut tout à fait avoir un sens dans $(\mathbb{Q}^\times, \cdot, ^{-1})$, et en a un ! quitte à remplacer $+, -$ en $\cdot, ^{-1}$ dans la formule en question ; $(\mathbb{R}, +, -)$ et $(\mathbb{Q}^\times, \cdot, ^{-1})$ ont le même langage.

On notera $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule ; cette notation signifiera que les <u>variables libres</u> de φ sont <u>parmi</u> $x_1, \ldots, x_n$. (Une variable libre est une variable non reliée à un quantificateur).

On voit que les formules peuvent ou ne peuvent pas avoir de variable libre :

. <u>Sans variable libre</u> : <u>ex</u> : $\forall x \forall y \exists z \; x + y = z$

↳ On les appelle les <u>énoncés</u>

. <u>Avec variable libre</u> : <u>ex</u> : $x + y = 1$

↳ c'est une <u>formule</u> en deux variables libres, on peut la noter $\varphi(x, y)$ ou même $\varphi(x, y, z)$ ...

Ensemble définissable : Soit $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ une formule de $\mathcal{M}$, et $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$ tels que
"$\varphi(a_1, \dots, a_n)$ est vrai" ; on note cela
$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$. ($\varphi(a_1, \dots, a_n)$ est l'expression obtenue en remplaçant x_i par a_i dans φ).

Par exemple : si $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ (dans $\mathbb{R}, +, \cdot$)

alors $\mathbb{R} \models \varphi(\cos\theta, \sin\theta)$

mais $\mathbb{R} \not\models \varphi(1, 1)$.

On a donc que toute formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ définit un sous ensemble de M^n, précisément

$$\{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}$$

on le note $\varphi(\mathcal{M})$. Tout ensemble $A \subseteq M^n$ tel qu'il existe φ une formule telle que $A = \varphi(\mathcal{M})$ est appelé un ensemble définissable de $\mathcal{M}$.

Comme les formules sont construites avec le langage, on dira qu'elles ensembles est définissable dans le langage $\mathcal{L}$. Ex précédent : $\varphi(\mathbb{R}) = S^1$

Le but de la théorie des modèles historiquement est de comprendre les ensembles définissables d'une structure donnée.

Un but plus "récent" est de classifier les modèles en fonction de la complexité de ses ensembles définissables.

4 - Énoncés et théorèmes.

Les énoncés ne définissent aucun ensemble, en revanche ils donnent des informations sur la structure elle-même.

Exemple : (1) $(G, \cdot, 1)$ groupe. Soit $\theta = \forall x \forall y \; x.y \doteq y.x$
C'est une formule commune à tous les groupes dans le langage minimal $\{\cdot\}$. On a de plus :

$$G \models \theta \quad \text{ssi} \quad G \text{ est un groupe abélien}$$

(2) Corps ordonnables : $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$ $\quad \sigma = \exists y \; y^2 \doteq -1$

$$K \models \sigma \quad \text{ssi} \quad K \text{ est ordonnable}$$

(3) Caractéristique d'un corps : $\quad \theta_p = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p} \doteq 0$

$$K \models \theta_p \quad \text{ssi} \quad \operatorname{car} K = p.$$

Une propriété exprimable au premier ordre d'une structure donnée $\mathcal{M}$ est une propriété qui est équivalente à ce que $\mathcal{M}$ satisfasse un certain énoncé. Si il existe $\theta \in \mathcal{X}$ tel que

$$\mathcal{M} \text{ est } [\dots] \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M} \models \theta$$

alors $[\dots]$ est une propriété exprimable au premier ordre. On dit aussi que c'est une propriété élémentaire. (θ peut être un ensemble d'énoncés).

Exemple : "K est contenu dans un corps différentiable non commutatif dont il est le centre et de dimension 4 sur K" ssi $K \models \exists \alpha \exists \beta \; \forall x \forall y \forall z \forall t \; x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 + \alpha\beta t^2 \doteq 0 \longrightarrow x = y = z = t = 0$

Exemple : « être un corps » est élémentaire ; « être un groupe », « être un corps algébriquement clos » « être un corps différentiellement clos », « être un corps PAC »..

Exemple : « être un ensemble infini » : $\{\exists x_1 \dots x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \mid n \in \mathbb{N}\}$

mais « être un ensemble fini » n'est relevé une ~~corps~~ disjonction infinie, donc ce n'est pas exprimable au premier ordre à priori.

De même pour « être un corps fini », « être un groupe fini »...

Théorie : (d'une structure). Soit $\mathcal{M}$ une structure on définit $Th(\mathcal{M}) = \{\varphi$ énoncés de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ tq $\mathcal{M} \models \varphi\}$ on l'appelle la théorie de $\mathcal{M}$.

On dit que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes (noté $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$) si $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.

Exemple : Si K et L sont deux corps algébriquement clos de même caractéristique, alors $K \equiv L$. On appelle $ACF = Th(K)$.

En théorie des modèles, on étudie plus des théories $T = Th(\mathcal{M})$. Cela signifie que l'on considère en l'objet T toutes les structures $\mathcal{N}$ telles que $\mathcal{N} \models Th(\mathcal{M})$ (et donc $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$).

On dit que $\mathcal{M}$ est un modèle de T si $\mathcal{M} \models T$.

Toute structure est un modèle de sa théorie.

Exemple : Si $\mathcal{E}$ est un ensemble ou une classe de structures on note $Th(\mathcal{E})$ pour l'ensemble des énoncés vrais dans toutes les structures de $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E}$ est la classe des corps algébriquement clos de car 0, $Th(\mathbb{C}) = Th(\mathcal{E})$

Si $\mathcal{E}$ est l'ensemble de tous les corps finis, alors comme « être un corps fini » n'est pas exprimable au premier ordre, il peut y avoir des modèles infinis de Th(F).

Digression : Des modèles bizarres : Le théorème de compacité dit qu'une théorie est consistante si et seulement si elle est finiment consistante.
Comme il existe des éléments dans $\mathbb{R}$ plus petits que tout sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}^{>0}$, il existe des éléments dans des modèles de Th($\mathbb{R}$) qui sont plus petits que tout élément de $\mathbb{Q}^{>0}$. ($\Rightarrow$ analyse non-standard, infinitésimaux).

Le mot théorie a un sens bien précis ici, il correspond à une notion élémentaire ; et le contrôle que l'on a sur les modèles de T est limité par le seul langage du premier ordre.

Exemples de théories :

- RCF $=$ Th($\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, \leq$)
- $ACF_0 =$ Th($\mathbb{C}$) $\quad ACF_p =$ Th($\mathbb{F}_p^{alg}$)
- $DCF_0 =$ Th(corps différentiellement clos de car 0)
- $ACVF_{(p,p')}$: corps algébriquement clos valués (de type (p,p'))
-

12/10

5 – Ensembles définissables par types complets : é.q

On pourrait se poser la question : pourquoi un tel formalisme ? Les ensembles définissables dans $\mathbb{C}$ sont des variétés affines, dans $\mathbb{R}$ ce sont des variétés semi-algébriques, ..

On a déjà un haut bras de généralité :

Corp diff	Corp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}_p$
équa-diff	variétés algébriq	variétés semi-alg	Boules

Cela permet aussi de donner une sémantique aux ensembles « combinaisons booléennes et projections d'ensembles atomes »

Comprendre les ensembles définissables d'une structure :

T a l'élimination des quanteurs (ou $\mathcal{M}$) ssi pour toute formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ il existe $\theta(x_1 .. x_n)$ sans quanteurs telle que

$$\underset{(T)}{\mathcal{M}} \models \forall x_1 .. x_n \ \varphi(x_1 .. x_n) \leftrightarrow \theta(x_1 .. x_n)$$

ou de manière équivalente

$$\varphi(\mathcal{M}) = \theta(\mathcal{M})$$

Mais les formules sans quantification sont beaucoup plus simples à appréhender !

Théorème : $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ et $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ ont l'é.q.

· Eq dans $\mathbb{C}$: les formules atomiques : $P(x_1 .. x_n) = 0$

$P(x_1 .. x_n) \neq 0$

si $n = 1$. Tous les ensembles déf en dim 1 sont finis ou cofinis.

De plus la projection d'un ensemble déf est déf $\Rightarrow$ la projection d'un ensemble constructible (= combinaisons booléennes de fermés de Zariski) est constructible

C'est le théorème de Chevalley. – On en déduit aussi le nullstellensatz de Hilbert.

- <u>E.q. dans $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, \leq)$</u> : $\Rightarrow$ Tout ensemble déf. en dim 1 est une union finie de segments.

  De plus : <u>17ème problème de Hilbert</u> : Si $f \in \mathbb{R}(\bar{x})$ telle que $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$ $f(\bar{x}) \geq 0$ alors f est une somme de carrés, i.e. $\exists\, g_1 \dots g_n \in \mathbb{R}(\bar{x})$ tq $f = \sum g_i^2$

<u>Autre</u> : • E.q. dans $\mathbb{Q}_p$: <u>Principe d'Ax-Kochen</u> :

$$\mathbb{Z}_p \models \sigma \iff \mathbb{F}_p[[T]] \models \sigma$$

pour tout p sauf un nombre fini (dépendant de σ).
(σ un énoncé).

<u>Théorème (Lang 1950)</u> : Si $f(x_1 \dots x_n) \in (\mathbb{F}_p[T])[x_1 \dots x_n]$ est homogène de degré d avec $d \geq 1$ et $n = d^2+1$ alors il existe $\bar{x} \in \mathbb{F}_p[T]^n$ tq $f(\bar{x}) = 0$.

On en déduit : Pour tout entier positif d il existe $N = N(d) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p > N$, si $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1 \dots x_n]$ est homogène de degré d et $n > d^2$ alors il existe $\bar{x} \in \mathbb{Z}_p^n$ tq $f(\bar{x}) = 0$.

Revenons sur nos deux premiers exemples :

- $\mathbb{C}$ est <u>fortement minimal</u> : i.e. tout ensemble en dim 1 est fini ou cofini

  on spécifie les structures que l'on veut étudier par la forme de leurs ensembles définissables.
  On sait que dans une théorie quelconque fortement minimal, on a une notion de prégéométrie associée à une "clôture algébrique" et une notion de <u>base</u>. Tout comme un corps alg. clos est déterminé par sa base de transcendance, toute théorie fortement

 minimal a aussi une base et une opération de clôture rationnelle.

On se pose aussi la question des structures définissables dans un théorème, i.e. les graphes des fonctions sont aussi déf : ex T définit $(G, \cdot)$ si G est déf et $\{(x,y,z) \mid x.y = z\}$ définissable.

On sait que les corps définissables dans une théorie fortement minimal sont algébriquement clos.

- $\mathbb{R}$ est o-minimal : i.e tout ensemble définissable en dim 1 est une union finie d'intervalles. (propriété des structures avec ordre total)

↳ Tout corps définissable dans une structure o-minimale est réel-clos ou alg. clos.

↳ Groupe définissable ~ groupe de Lie (si $M = \mathbb{R}$ c'est un groupe de Lie)

↳ <u>André-Oort conjecture</u> (Géométrie diophantienne)

"Soit X une variété de Shimura et $V \subseteq X$. Alors V contient un nb fini de sous variétés spéciales maximales". (Pila) (2009)

On se donne donc une contrainte comme on a vu en faute maintenant et on regarde ce qu'il se passe pour ce genre de théorie.

6 - Vers de nouvelles contraintes.

On considère à présent des nouvelles notions que l'on définit :

- **T est stable** : si pour tout modèle $\mathcal{M}$, pour toute formule $\varphi(x,y)$ il n'existe pas de suite $(a_i)_{i<\omega}$ et $(b_i)_{i<\omega}$ tq $\mathcal{M} \models \varphi(a_i, b_j)$ ssi $i<j$.

  "T ne définit pas d'instabilité"

- **T est NIP** : si pour tout modèle $\mathcal{M} \models T$ pour toute formule $\varphi(x,y)$ il n'existe pas de suites $(a_i)_{i<\omega}$ $(b_I)_{I\subseteq\mathbb{N}}$ tq $\mathcal{M} \models \varphi(a_i, b_I)$ ssi $i \in I$

  "T ne code pas les parties de $\mathbb{N}$"

- **T est simple** : si pour tout modèle $\mathcal{M} \models T$, pour toute formule $\varphi(x,y)$ il n'existe pas de suite $(a_{ij})_{i,j<\omega}$ tq et $(b_h)_{h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}}$ tels que

$$\begin{cases} \mathcal{M} \models \varphi(b_h, a_{ij}) \text{ ssi } j = h(i) \\ (\varphi(x, a_{ij}))_{i\in\mathbb{N}} \text{ est } k\text{-inconsistant} \end{cases}$$

autrement dit

$$\begin{array}{llll} \underset{\text{incons}}{k} \to \varphi(x, a_{00}) & \varphi(x, a_{01}) & \varphi(x, a_{02}) & \cdots \\ \quad\ \varphi(x, a_{10}) & \varphi(x, a_{11}) & \varphi(x, \cdots) & \\ \quad\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

cohérent

Intérêt de ce genre de contrôlabilité :

- très général : on va voir des exemples mais cela permet de faire des liens entre des classes a priori différentes mais quelque part.
- "Passe à l'interprétation" : si dans T stable/simple/NIP on peut construire une structure M dans Th(M) est aussi stable/simple/NIP.

Par exemple, $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ est NIP et on peut construire les quaternions → donc $(\mathbb{H}, +, \cdot, 0, 1)$ est NIP (alors que ce n'est pas un corps réel clos, pas ordonné, pas o-minimal).

Intuition : . Stabilité : "structures non ordonnées" (but de l'analyse), qui développent dans les années 80 - 87 : Poizat : analogie entre théorie stable et géométrie algébrique. bot. non stable

. NIP : Intuition : Comportement autour d'un ordre. o-min est NIP, comportement autour d'ordres. Les contraintes pour des théories générales de la même.

. simplicité : On empêche la formation d'un arbre avec une infinité de branches (racine).

7. Résultats et conjectures :

Exemples de théories de corps : Les différentes structures que l'on peut mettre sur un corps donne naissance à de nombreux exemples en théorie des modèles

ACF : corps alg clos

DCF : corps différentiellement clos (car 0)

$SCF_p^{(n)}$: corps séparablement clos $n = [F : F^p]$ (invariant d'Ershov)

Corps PAC : corps pseudo algébriquement clos : toute variété ~~[illegible]~~ absolument irréductible définie sur K admet un zéro dans K. imperfect: bounded

Psf : Corps pseudo-finis : ultraproduits de corps finis, (car 0 ou p) ; corps infinis vérifiant les mêmes propriétés élémentaires qu'un corps fini caractérisés par : $\begin{cases} \text{parfait} \\ \text{grp gal} = \hat{\mathbb{Z}} \end{cases}$: 1 seul ext d'ordre n

Psf $\Rightarrow$ PAC

ACFA : Corps K muni d'un automorphisme σ générique : tout système fini d'équ σ-eq qui a une sol dans une extension en a une dans K.

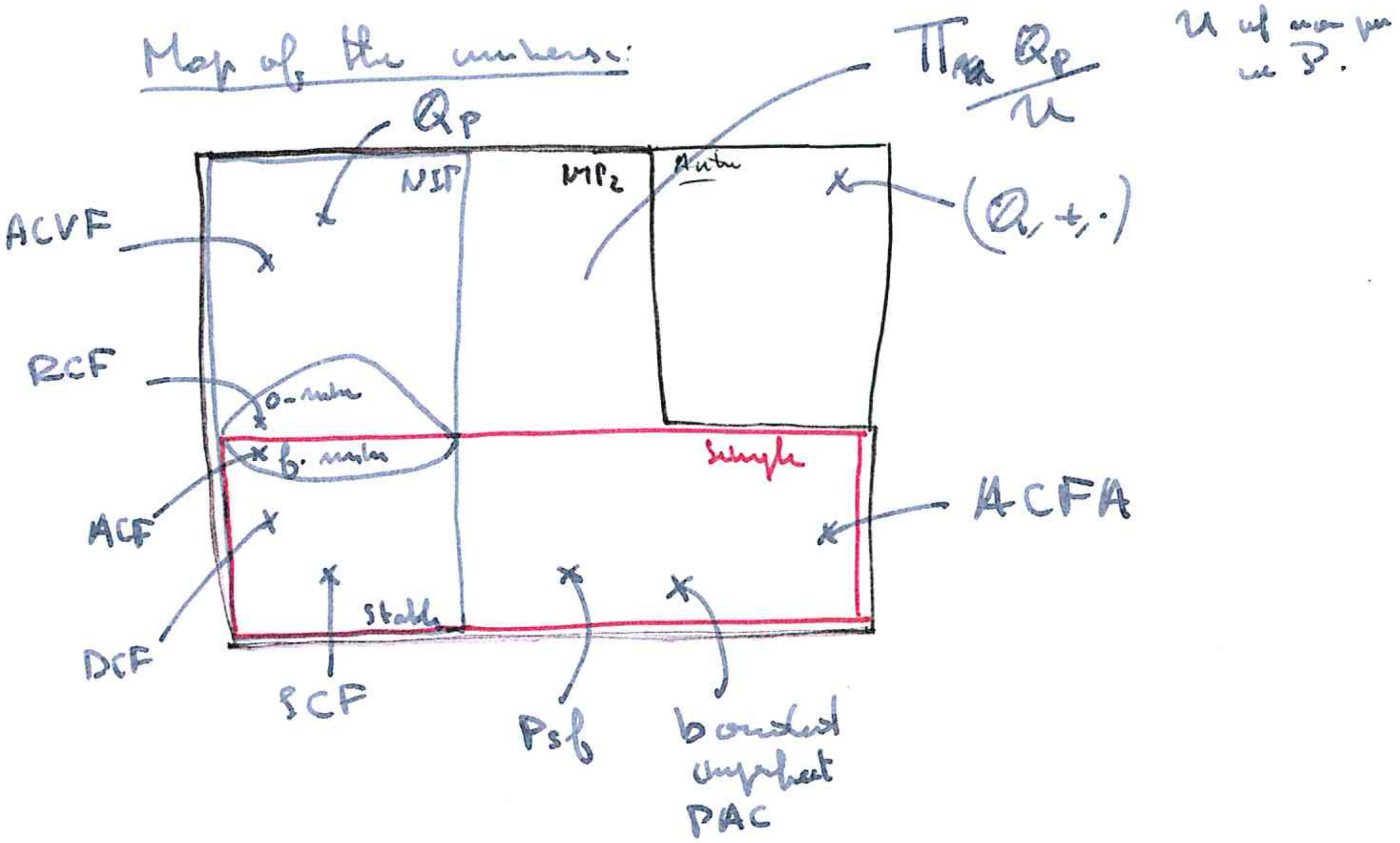
RCF : $Th(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, \leq)$

ACVF : dépend de la car : corps valués alg clos :
(p, p) : $Th(\mathbb{F}_p(T)^{alg})$

$Th(\mathbb{Q}_p)$.

Théorème : Toute théorie à la fois simple et NIP est stable.

Map of the universe:



Conjecture : (1) Les corps (purs) stables sont séparablement clos (Plus vieux que j'ai trouvé : Chatzidakis 1996, mais elle dit "A well known conjecture states that all stable fields are separably closed".

(2) Les corps purs simples sont PAC et bornés (borné : un nb fini d'ext. de deg n pour chaque n). (Chatzidakis & Pillay : 1998)

(3) Les corps purs sont soit séparablement clos, soit réels clos, soit ils admettent une valuation henselienne définissable. (Shelah l'a conjecturé pour les corps fortement dépendants (dp-rang fini).)

<u>Résultat</u> : . On sait que les corps stables de car $p>0$ sont Artin-Schreier-clos, que les corps superstables sont algébriquement clos [Cherlin-Shelah 1980]

. On sait que les corps simples n'ont qu'un nombre fini d'extension d'Artin-Schreier (= borné par la notion d'Artin-Schreier) (en car p), les corps supersimples sont parfaits et bornés, et les corps simples PAC sont bornés. [Pillay Poizat] [Chatzidakis 1997]

. Les corps NIP sont Artin-Schreier clos en car $p>0$ [Kaplan Scanlon Wagner 2010]

Les corps purs dp-minimaux qui ne sont ni réels-clos ni p-adiquement clos sont exactement :

(K, k, Γ, v) henselien sans défaut

- $k \models ACF_p$ ou k est $\equiv$ corps local de car 0
- $\forall n$ $[\Gamma/n\Gamma]$ est fini
- si k a caractéristique p $\gamma \in [-v(p), v(p)]$ alors $\gamma \in p.\Gamma$.

(si car $K = p$ $[-v(p), v(p)] = (-\infty, +\infty)$.

[Will Johnson 2015].

Plan de l'exposé : (1)

Présentation : qu'est-ce que la théorie des modèles ? la théorie des modèles d'avant et de maintenant. Dans cet exposé : lien avec théorie des corps : les exemples seront principalement liés à la théorie des corps.

1. Structure :

déf : notion naturelle de structure "algébrique"

↳ $\mathcal{M} = (M, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{R})$

M : un ensemble

$\mathcal{F}$: un ensemble de fonctions totales $f : M^k \to M$; k est l'arité de f.

$\mathcal{E}$: ens de constantes, $\mathcal{E} \subseteq M$

$\mathcal{R}$: ensemble de relations $R \in \mathcal{R}$, $R \subseteq M^k$, k arité

Ex : • groupe $(G, \cdot, 1)$; anneau $(A, +, -, \cdot)$; corps $(K, +, \cdot)$

• Structures relationnelles binaires

Graphe (G, A) ; ordre

ensemble linéairement ordonné : $(\mathbb{Q}, \leq)$

Modèle de ZF : $(\mathcal{U}, \in)$

• EV, modules, algèbres : $(V, +, -, 0, (m_\lambda)_{\lambda \in K})$

$m_\lambda : V \to V$, $x \mapsto \lambda \cdot x$

• Corps enrichis :

- corps ordonnés : $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$
- corps différentiels : $(K(X), +, \cdot, \frac{\partial}{\partial X})$

  U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $(\mathcal{M}(U), +, \cdot, \partial)$
- corps valués, à différence ...

• Géométrie : $(\mathcal{P} \cup \Delta, i)$

2 _ Langage :

Quelle différence entre $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$

C'est le langage : $(\mathbb{R}, \overset{\text{fct}}{\cdot})$ $(\mathbb{R}, \overset{\text{relat}}{\leq})$?

Langage différent $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$

Même langage : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $(\mathbb{Q}, \cdot, <)$

fct bin

relat° bin

$(\mathbb{N}, s)$ $(\mathbb{R}^*, \cdot^{-1})$

fct un

C'est la donnée de $\mathcal{M} = (M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{E})$

1 fct bin 2 relation un ...

C'est la donnée de l'arité avec les arités.

3 _ Formules : ~~Formule~~ On se donne une structure :

& non déf

$(M, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{R})$

~~Une formule de~~ On se donne des variables $x, y, z, \ldots$

$x_1 \ldots x_n \ldots$ etc

et on fait des phrases finies qui ont du sens

en se donnant uniquement les objets

$x, y, z, \ldots$ les fct $\mathcal{F}$, rela $\mathcal{R}$, cte $\mathcal{E}$

les cog des $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$, l'égalité "="

et les quantificateurs $\forall, \exists$

ex : • Termes : $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ $P \in \mathbb{Z}[X]$

$P(x_1, \ldots, x_n)$ x^2 3

$x + y$

• Formule atomique : $x^2 = 0$ $x + y = 3$

$P(x) = 0$ $P(x) < 0$

$P(x) < Q(y)$

Form QF $P(x) = 0 \to x = 0$ $x^2+y^2=0 \wedge x\neq 0$ (2)

Formule $\exists x\ P(x)=0$ $\exists y\ y<0$

$\exists y\ y^2 = x$

$P(x) < 0$

Sans variable libre : énoncés : $\exists y\ y^2<0$

Avec variable libre : Formule :

$x^2+y^2=1$

on note $\varphi(x,y)$

Rq : qd on construit les formules de $\mathcal{M}=(M, F, R, \mathcal{E})$ on n'utilise que $F, R, \mathcal{E}$ et non que l'ens. de ce fait une forme

$(\mathbb{Z}, +, |) \xrightarrow{\text{même langage}} (\mathbb{Q}, \cdot, <)$

$\exists x \exists y\ x+y \mid 3 \quad \leftrightarrow \quad \exists x \exists y\ x\cdot y < 3$

les formules ne dépendent que du langage.

↳ formules de $\mathcal{L}$, langage de $\mathcal{M}$.

Ensemble déf : $\mathcal{M}$ structure $\varphi(x_1 \dots x_n)$ formule et $a_1 \dots a_n \in M$, $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ a du sens et est soit vrai soit faux $\varphi(x,y) = x^2+y^2=1$

si c'est vrai on dit $\mathbb{R} \models \varphi(\cos\theta, \sin\theta)$

$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ $\mathbb{R} \not\models \varphi(1,1)$

On note $\varphi(\mathcal{M})$ $\varphi(\mathbb{R}) = S^1$

c'est $\{(a_1 \dots a_n) \in M^n, \mathcal{M} \models \varphi(a_1 \dots a_n)\}$

Tout ensemble de la forme $\varphi(\mathcal{M})$ est un ensemble définissable de $\mathcal{M}$.

ex : Dans $\mathbb{C}$: ~~$P(x) \wedge Q(x)$~~ ensemble déf par atomes : variétés affines / $\frac{F}{Z}$

3) Ensemb. et théor. :

Deux formules peuvent définir le même ens. :

$\exists y \; y^2 = x \qquad x \geq 0$

l'ensemble définissable associé est $\mathbb{R}^{\geq 0}$, on considère donc les ens. déf. car "des formules qualitatives pour le fait d'avoir le même sens".

On s'intéresse à la sémantique du langage et non à la syntaxe.

Théorie des modèles : • comprendre les ensembles définissables d'une structure. (en dur tout.)
• classifier les modèles par la complexité de ses ensembles définissables.

4 _ Ensembles et théories :

énoncé $\to$ contraintes sur les structures (ne déf. pas d'ensemble)

Ex : (1) $(G, \cdot, 1)$ $\qquad \theta = \forall x \forall y \; x.y = y.x$

$G \models \theta$ ssi G est abélien

(2) $(K, \cdot, +)$ $\qquad \theta_p = \underbrace{1 + \dots + 1}_{p} = 0$

$K \models \theta_p$ ssi K est de car p

[...] est une propriété exprimable au premier ordre si il existe $\Phi \subseteq$ formules de $\mathcal{L}$ tq

$\mathcal{M}$ est [...] ssi $\mathcal{M} \models \Phi$

(ou prop élémentaire)

ex : (Pascal)

"K contient deux corps ", $K \models \exists \alpha \exists \beta \; \forall x \forall y \forall z \forall t$
"def "une conséquence de deux b m" $\Leftrightarrow$ $x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 + \alpha\beta t^2 = 0$

<u>Ex</u> : (Failles) : "être de taille n" se dit
mais être fini correspond à une ~~conjonct~~ disjonction infinie donc pas exprimable.
être infini l'est.

<u>Théorie d'une structure</u> : $\mathcal{M}$ une structure.

• $Th(\mathcal{M}) = \{\theta \in \mathcal{L}$ clos tq $\mathcal{M} \models \theta\}$ Théorie de $\mathcal{M}$

• $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ ($\mathcal{M}$ est élémentairement équivalente à $\mathcal{N}$) si
$$Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$$

<u>ex</u> : $\mathbb{C} \equiv \overline{\mathbb{Q}}$ $\qquad \mathbb{F}_p(T)^{alg} \equiv \mathbb{F}_p^{alg}$

On considère donc "Thm des corps alg clos" théorie de ... on travaille avec ce que la logique du 1er ordre nous permet de dire sur la structure considérée. $T =$ "vrai ds les $\mathcal{M}$ tq $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$"

<u>Modèle</u> : de T = $\mathcal{M} \models T$.
Toute structure est modèle de sa théorie.

<u>ex</u> : On peut aussi regarder tout ce qui est vrai dans tous les corps finis, et il y a des modèles infinis de ça ! c'est ce qu'on appelle les corps pseudo-finis.
<u>ex</u> : ultraproduit

5 - É-q : ensembl def par termes complexes :

T a l'élimination des quantificateurs si toute formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est équivalente à une formule sans quanteurs. $\Theta(x_1 \dots x_n)$. autrement dit $\forall \mathcal{M} \models T$,

$$\Theta(\mathcal{M}) = \varphi(\mathcal{M}) \text{ et } \Theta \text{ est}$$

sans quanteurs!

donc cela revient à dire que les ens def sont des combinaisons booléennes d'ensemble atomiques.

Théorème : $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ a l'eq
$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ a l'eq

- EQ dans $\mathbb{C}$: Fml atom : $P(x_1 \dots x_n) = 0$

~~$P(x_1 \dots x_n)$~~

↳ les ensemble définissables sont des ensembles constructibles (= comb booléennes de variétés affines)

↳ Chevalley : ~~Tout ensemble~~ La proj d'un ens constructible est constructible.

↳ Nullstellensatz.

↳ En dim 1 : Tout ens def est fini ou cofini.

- E.Q. dans $\mathbb{R}$: Formule atomique : $Q(\bar{x}) < P(\bar{x})$ "variétés semi-algébriques"

↳ les ensembl def sont les ensembles semi-constructibles en $\mathbb{R}$

Tarski-Seidenberg | ↳ projection d'ensembl semi-algébrique est semi-algébrique (clôture par les clôtures des fml et clôture par $\exists$)

$(\exists x \; ax^2+bx+c=0) \leftrightarrow b^2-4ac \geq 0.$

↳ tout ensemble déf. dans $\mathbb{R}$ est une union finie d'intervalles.

↳ 17ème Problème de Hilbert : Toute fct rationnelle sur $\mathbb{R}$ positive est une Σ de carrés.

- EQ dans $\mathbb{Q}_p$ Ax-Kochen-Ershov ...

Retour sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.

- Tout fortement minimale : si tout ensemble déf de dim 1 dans tout modèle est fini ou cofini ex : $\mathbb{C}$.

On généralise les théorèmes que l'on établit par ex. contrôle sur les ensembles déf en premier ordre en dim 1.

↳ notion de "prégéométrie" : "base", "dimension" "clôture algébrique" ...

Tout ens. CAC déf. est en union des translatés de la clôture fortement minimal venant contrôler autour d'une base.

Rq : Question des gps / corps déf dans une théorie de donnée + les gps déf.

↳ tout corps déf dans une théorie f. m. est algébriquement clos.

↳ (Cas) tout groupe déf dans une théorie f. m. est un gp algébrique sur un corps algébriquement clos.

. T est o-minimal : si tout ensemble déf en dim 1 est une union finie d'intervalles (nécessite un ordre)

↳ Tout corps définissable est réel-clos ou alg clos

↳ Grp déf ~ grp de Lie.

↳ André-Oort conjecture (géométrie diophantienne) (Pila 2009)

6 - Vers de nouvelles contrées

. T est stable : " T ne définit pas d'ordre "

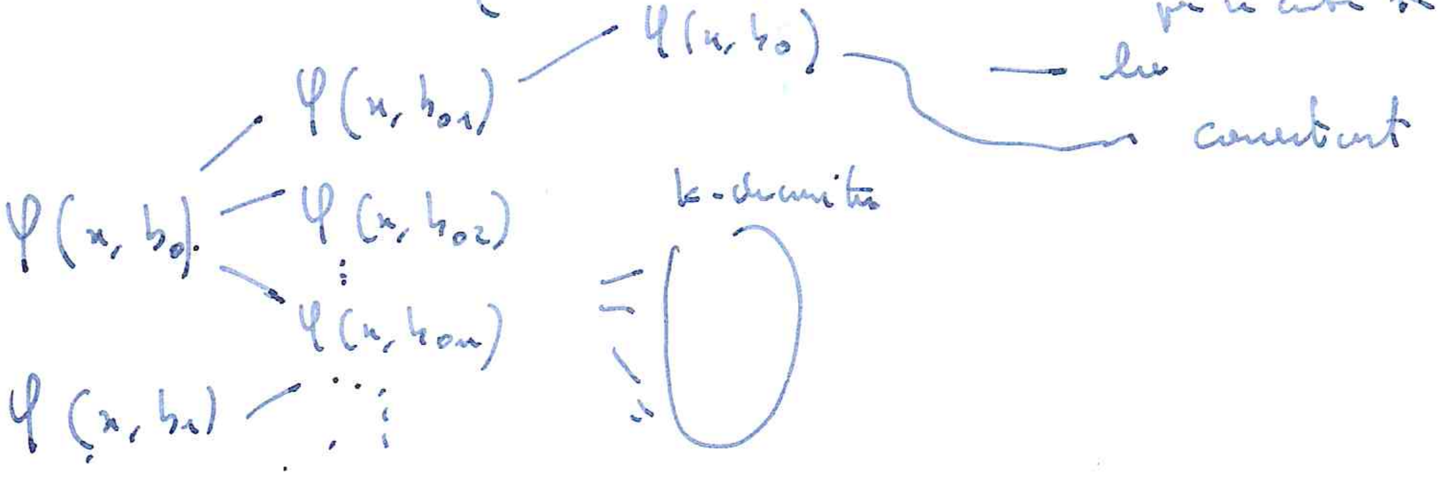
. T est NIP : " T ne code pas des parties de $\mathbb{N}$ "

. T est simple : " T ne définit pas d'ordre infini avec infinité de branches "

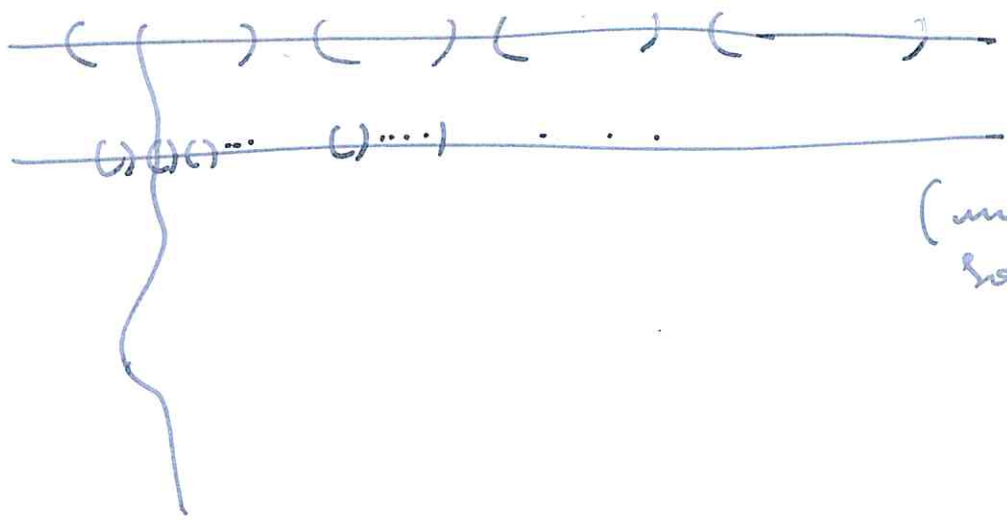
T est simple si $\forall M \models T$ $\forall \varphi(x,y)$ il n'existe pas $\{b_\sigma,\ \sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$

tq (1) $\forall f \in \mathbb{N}^{\omega}$ $\{\varphi(x, b_{f|n}) : n \in \mathbb{N}\}$ est consistant

(2) $\forall \sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}$ $\{\varphi(x, b_{\sigma i}) : i \in \mathbb{N}\}$ est k-inconsistant pour un certain k.



ex :



(modèles saturés)

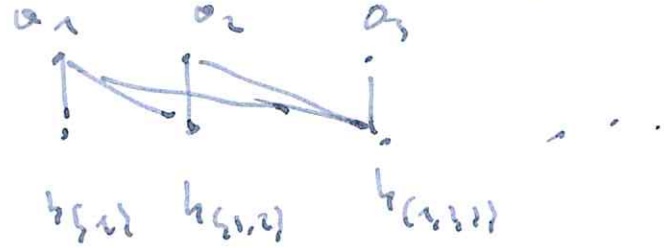
Remarque : Toute formule $\varphi(x, y)$ définit un graphe biparti

donc on voit que dans tout les graphes possibles

aucun n'est

« bon graphe » interdits
$\Updownarrow$
stable

NIP



Intérêt de ce genre de construction

– très général : ~~on ne voit que les exemples de~~ les connexions entre théories différentes correspondent à des connexions profondes. ex
$\mathbb{Q}_p$ est un autre.

– « Passe à l'interprétation » :
Si M est une structure X et N interprétable dans M
($\approx$ définit) alors N aussi.

ex : $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ est NIP et
$\mathbb{R}$ définit $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$
donc $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ sont NIP.

(ex étude des groupes stables = étude des groupes déf. dans ...)

Intuition : • Stable : pas d'ordre, pas d'algèbre
vs géométrie algébrique (linéaire intégrable)

• NIP : contient ordres denses, dl...

• simple : empêche un arbre avec une infinité de branches.

7 - Résultats et conjectures

Thm : Toute théorie simple et nip est stable

Map of the universe :