

Sous-groupe additif générique d'un corps algébriquement clos de caractéristique positive.

Christian d'Elbée

- 1 **Prédicat générique.** [Chatzidakis-Pillay 98] T \mathcal{L} -théorie modèle complète élimine \exists^∞ . La $\mathcal{L} \cup \{P\}$ -théorie T , admet une modèle compagne TP . Si T est simple, TP aussi.

- 1 **Prédicat générique.** [Chatzidakis-Pillay 98] T \mathcal{L} -théorie modèle complète élimine \exists^∞ . La $\mathcal{L} \cup \{P\}$ -théorie T , admet une modèle compagne TP . Si T est simple, TP aussi.
- 2 **Expansion générique.** T \mathcal{L} -théorie modèle complète, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$, est-ce que T en tant que \mathcal{L}' -théorie (incomplète) admet une modèle compagne $T_{\mathcal{L}'}$?

- 1 **Prédicat générique.** [Chatzidakis-Pillay 98] T \mathcal{L} -théorie modèle complète élimine \exists^∞ . La $\mathcal{L} \cup \{P\}$ -théorie T , admet une modèle compagne TP . Si T est simple, TP aussi.
- 2 **Expansion générique.** T \mathcal{L} -théorie modèle complète, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$, est-ce que T en tant que \mathcal{L}' -théorie (incomplète) admet une modèle compagne $T_{\mathcal{L}'}$?
 - OUI : si (et seulement si) T élimine \exists^∞ [Winkler 1975]

- 1 **Prédicat générique.** [Chatzidakis-Pillay 98] T \mathcal{L} -théorie modèle complète élimine \exists^∞ . La $\mathcal{L} \cup \{P\}$ -théorie T , admet une modèle compagne TP . Si T est simple, TP aussi.
- 2 **Expansion générique.** T \mathcal{L} -théorie modèle complète, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$, est-ce que T en tant que \mathcal{L}' -théorie (incomplète) admet une modèle compagne $T_{\mathcal{L}'}$?
 - OUI : si (et seulement si) T élimine \exists^∞ [Winkler 1975]
 - Si T est $NSOP_1$ alors $T_{\mathcal{L}'}$ aussi [Kruckman-Ramsey 2018]. ([Jeřábek 2018] for $T_{\mathcal{L}'}^\emptyset$)

La théorie $ACF_p G$

Modèle-compagne

On fixe $p > 0$ premier. \mathbb{F}_p corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique.

La théorie $ACF_p G$

Modèle-compagne

On fixe $p > 0$ premier. \mathbb{F}_p corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique.

Soit $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1\}$ et $\mathcal{L}^G = \mathcal{L} \cup \{G\}$, G prédicat unaire.

La théorie $ACF_p G$

Modèle-compagne

On fixe $p > 0$ premier. \mathbb{F}_p corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique.

Soit $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ et $\mathcal{L}^G = \mathcal{L} \cup \{G\}$, G prédicat unaire.

Soit ACF_p^G la \mathcal{L}^G -théorie dont les modèles (F, H) satisfont:

- $F \models ACF_p$;

La théorie $ACF_p G$

Modèle-compagne

On fixe $p > 0$ premier. \mathbb{F}_p corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique.

Soit $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ et $\mathcal{L}^G = \mathcal{L} \cup \{G\}$, G prédicat unaire.

Soit ACF_p^G la \mathcal{L}^G -théorie dont les modèles (F, H) satisfont:

- $F \models ACF_p$;
- $H = G(F)$ est un sous-groupe additif de F .

La théorie $ACF_p G$

Modèle-compagne

On fixe $p > 0$ premier. \mathbb{F}_p corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique.

Soit $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ et $\mathcal{L}^G = \mathcal{L} \cup \{G\}$, G prédicat unaire. Soit ACF_p^G la \mathcal{L}^G -théorie dont les modèles (F, H) satisfont:

- $F \models ACF_p$;
- $H = G(F)$ est un sous-groupe additif de F .

Théorème

ACF_p^G admet une modèle compagne, on la note $ACF_p G$.

La théorie $ACF_p G$

Modèle-compagne

On fixe $p > 0$ premier. \mathbb{F}_p corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique.

Soit $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1\}$ et $\mathcal{L}^G = \mathcal{L} \cup \{G\}$, G prédicat unaire. Soit ACF_p^G la \mathcal{L}^G -théorie dont les modèles (F, H) satisfont:

- $F \models ACF_p$;
- $H = G(F)$ est un sous-groupe additif de F .

Théorème

ACF_p^G admet une modèle compagne, on la note $ACF_p G$.

- Tout modèle d' ACF_p^G se plonge dans un modèle d' $ACF_p G$;

La théorie $ACF_p G$

Modèle-compagne

On fixe $p > 0$ premier. \mathbb{F}_p corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique.

Soit $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ et $\mathcal{L}^G = \mathcal{L} \cup \{G\}$, G prédicat unaire. Soit ACF_p^G la \mathcal{L}^G -théorie dont les modèles (F, H) satisfont:

- $F \models ACF_p$;
- $H = G(F)$ est un sous-groupe additif de F .

Théorème

ACF_p^G admet une modèle compagne, on la note $ACF_p G$.

- Tout modèle d' ACF_p^G se plonge dans un modèle d' $ACF_p G$;
- Tout modèle d' $ACF_p G$ est existentiellement clos dans tout modèle d' ACF_p^G qui l'étend.

La théorie $ACF_p G$

Modèle-compagne

On fixe $p > 0$ premier. \mathbb{F}_p corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique.

Soit $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ et $\mathcal{L}^G = \mathcal{L} \cup \{G\}$, G prédicat unaire. Soit ACF_p^G la \mathcal{L}^G -théorie dont les modèles (F, H) satisfont:

- $F \models ACF_p$;
- $H = G(F)$ est un sous-groupe additif de F .

Théorème

ACF_p^G admet une modèle compagne, on la note $ACF_p G$.

- Tout modèle d' ACF_p^G se plonge dans un modèle d' $ACF_p G$;
- Tout modèle d' $ACF_p G$ est existentiellement clos dans tout modèle d' ACF_p^G qui l'étend.

$ACF_p G$ est une axiomatique des modèles existentiellement clos d' ACF_p^G .

Lemme (Chatzidakis-Pillay)

Si T élimine \exists^∞ alors pour toute formule $\phi(x, y)$ il existe une formule $\theta_\phi(y)$ telle que pour tout uplet b de $\mathcal{M} \models T$ on ait

$$\mathcal{M} \models \theta_\phi(b) \iff \text{il existe un uplet } a \text{ de } \mathcal{N} \succ \mathcal{M} \text{ tel que} \\ a \cap \mathcal{M} = \emptyset \text{ et } \mathcal{N} \models \phi(a, b)$$

Lemme (Chatzidakis-Pillay)

Si T élimine \exists^∞ alors pour toute formule $\phi(x, y)$ il existe une formule $\theta_\phi(y)$ telle que pour tout uplet b de $\mathcal{M} \models T$ on ait

$$\mathcal{M} \models \theta_\phi(b) \iff \text{il existe un uplet } a \text{ de } \mathcal{N} \succ \mathcal{M} \text{ tel que} \\ a \cap \mathcal{M} = \emptyset \text{ et } \mathcal{N} \models \phi(a, b)$$

Dans notre cas: Pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x, y)$ il existe une formule $\theta_\phi(y)$ telle que $K \models ACF_p$ et pour tout uplet b de K

$$K \models \theta_\phi(b) \iff \text{il existe un uplet } a \text{ d'une extension de } K \\ \text{tel que } a \text{ est } \mathbb{F}_p\text{-linéairement indépendant sur } K \text{ et} \\ \models \phi(a, b)$$

Cette formule n'est pas uniforme en p .

On note $\langle a \rangle$ l'espace vectoriel sur \mathbb{F}_p engendré par a .

La théorie $ACF_p G$

Les axiomes

On note $\langle a \rangle$ l'espace vectoriel sur \mathbb{F}_p engendré par a . La théorie $ACF_p G$ est obtenue en ajoutant à ACF_p le schéma d'axiome suivant: pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x, y)$, $x' \subseteq x$, $y' \subseteq y$:

La théorie $ACF_p G$

Les axiomes

On note $\langle a \rangle$ l'espace vectoriel sur \mathbb{F}_p engendré par a . La théorie $ACF_p G$ est obtenue en ajoutant à ACF_p le schéma d'axiome suivant: pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x, y)$, $x' \subseteq x$, $y' \subseteq y$:

$$\forall y (\theta_\phi(y) \wedge \langle y' \rangle \cap G = \{0\})$$

La théorie $ACF_p G$

Les axiomes

On note $\langle a \rangle$ l'espace vectoriel sur \mathbb{F}_p engendré par a . La théorie $ACF_p G$ est obtenue en ajoutant à ACF_p le schéma d'axiome suivant: pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x, y)$, $x' \subseteq x$, $y' \subseteq y$:

$$\forall y (\theta_\phi(y) \wedge \langle y' \rangle \cap G = \{0\} \rightarrow \exists x (\phi(x, y) \wedge \langle xy' \rangle \cap G = \langle x' \rangle))$$

Pas uniforme en p .

On note $\langle a \rangle$ l'espace vectoriel sur \mathbb{F}_p engendré par a . La théorie $ACF_p G$ est obtenue en ajoutant à ACF_p le schéma d'axiome suivant: pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x, y)$, $x' \subseteq x$, $y' \subseteq y$:

$$\forall y (\theta_\phi(y) \wedge \langle y' \rangle \cap G = \{0\} \rightarrow \exists x (\phi(x, y) \wedge \langle xy' \rangle \cap G = \langle x' \rangle))$$

Pas uniforme en p .

Complétions. Pour deux modèles (K_1, G_1) et (K_2, G_2) de $ACF_p G$,

$$(K_1, G_1) \equiv (K_2, G_2) \iff (\overline{\mathbb{F}}_p, G_1(\overline{\mathbb{F}}_p)) \text{ et } (\overline{\mathbb{F}}_p, G_2(\overline{\mathbb{F}}_p)) \text{ sont } \mathcal{L}^G \text{ - isomorphes.}$$

On note $\langle a \rangle$ l'espace vectoriel sur \mathbb{F}_p engendré par a . La théorie $ACF_p G$ est obtenue en ajoutant à ACF_p le schéma d'axiome suivant: pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x, y)$, $x' \subseteq x$, $y' \subseteq y$:

$$\forall y (\theta_\phi(y) \wedge \langle y' \rangle \cap G = \{0\} \rightarrow \exists x (\phi(x, y) \wedge \langle xy' \rangle \cap G = \langle x' \rangle))$$

Pas uniforme en p .

Complétions. Pour deux modèles (K_1, G_1) et (K_2, G_2) de $ACF_p G$,

$$(K_1, G_1) \equiv (K_2, G_2) \iff (\overline{\mathbb{F}}_p, G_1(\overline{\mathbb{F}}_p)) \text{ et } (\overline{\mathbb{F}}_p, G_2(\overline{\mathbb{F}}_p)) \text{ sont } \mathcal{L}^G \text{ - isomorphes.}$$

Clôture algébrique. La clôture algébrique dans $ACF_p G$ est donnée par la clôture algébrique au sens d' ACF_p .

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et G_0 sous-groupe fini \mathbb{F}_{p^n} il existe $G_0 \subset G \subset \overline{\mathbb{F}_p}$ tel que $(\overline{\mathbb{F}_p}, G) \models ACF_p G$.

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et G_0 sous-groupe fini \mathbb{F}_{p^n} il existe $G_0 \subset G \subset \overline{\mathbb{F}}_p$ tel que $(\overline{\mathbb{F}}_p, G) \models ACF_p G$.

Soit \mathcal{U} un ultrafiltre non principal sur l'ensemble des nombres premiers, et un modèle $(\overline{\mathbb{F}}_q, G_q)$ de $ACF_q G$, pour tout premier q .
Qu'est-ce que c'est que

$$\prod_{q \in \mathcal{U}} (\overline{\mathbb{F}}_q, G_q) ?$$

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et G_0 sous-groupe fini \mathbb{F}_{p^n} il existe $G_0 \subset G \subset \overline{\mathbb{F}}_p$ tel que $(\overline{\mathbb{F}}_p, G) \models ACF_p G$.

Soit \mathcal{U} un ultrafiltre non principal sur l'ensemble des nombres premiers, et un modèle $(\overline{\mathbb{F}}_q, G_q)$ de $ACF_q G$, pour tout premier q .
Qu'est-ce que c'est que

$$\prod_{q \in \mathcal{U}} (\overline{\mathbb{F}}_q, G_q) ?$$

Remarque (Caractéristique 0 ?)

Si (K, G) est un modèle existentiellement clos de la classe des structures (K, G) avec $\text{car}(K) = 0$, alors $\text{Stab}(G) = \mathbb{Z}$. **Pas axiomatisable.**

Definition

Soit T une théorie et $\phi(x, y)$ une formule dans le langage de T .

Definition

Soit T une théorie et $\phi(x, y)$ une formule dans le langage de T .

- ① On dit que $\phi(x, y)$ a la propriété forte de l'ordre 1 (SOP_1) s'il existe un arbre d'uplets $(b_\eta)_{\eta \in 2^{<\omega}}$ tel que
- pour tout $\eta \in 2^\omega$ $\{\phi(x, b_{\eta \upharpoonright \alpha} \mid \alpha < \omega)\}$ est consistant
 - pour tout $\eta, \nu \in 2^{<\omega}$ si $\eta \frown 0 \triangleleft \nu$ alors $\{\phi(x, b_\nu), \phi(x, b_{\eta \frown 1})\}$ est inconsistant.

Definition

Soit T une théorie et $\phi(x, y)$ une formule dans le langage de T .

- ① On dit que $\phi(x, y)$ a la propriété forte de l'ordre 1 (SOP_1) s'il existe un arbre d'uplets $(b_\eta)_{\eta \in 2^{<\omega}}$ tel que
- pour tout $\eta \in 2^\omega$ $\{\phi(x, b_{\eta \upharpoonright \alpha} \mid \alpha < \omega)\}$ est consistant
 - pour tout $\eta, \nu \in 2^{<\omega}$ si $\eta \frown 0 \triangleleft \nu$ alors $\{\phi(x, b_\nu), \phi(x, b_{\eta \frown 1})\}$ est inconsistant.

Definition

Soit T une théorie et $\phi(x, y)$ une formule dans le langage de T .

- 1 On dit que $\phi(x, y)$ a la propriété forte de l'ordre 1 (SOP_1) s'il existe un arbre d'uplets $(b_\eta)_{\eta \in 2^{<\omega}}$ tel que
 - pour tout $\eta \in 2^\omega$ $\{\phi(x, b_{\eta \upharpoonright \alpha} \mid \alpha < \omega)\}$ est consistant
 - pour tout $\eta, \nu \in 2^{<\omega}$ si $\eta \frown 0 \triangleleft \nu$ alors $\{\phi(x, b_\nu), \phi(x, b_{\eta \frown 1})\}$ est inconsistant.
- 2 On dit que $\phi(x, b)$ Kim-divise sur A s'il existe une extension globale A -invariante $p(x)$ de $tp(b/A)$ et $(b_i)_{i < \omega}$ telle que $b_i \models p \upharpoonright Ab_{<i}$ et $\bigwedge_{i < \omega} \phi(x, b_i)$ est inconsistant.

Definition

Soit T une théorie et $\phi(x, y)$ une formule dans le langage de T .

- 1 On dit que $\phi(x, y)$ a la propriété forte de l'ordre 1 (SOP_1) s'il existe un arbre d'uplets $(b_\eta)_{\eta \in 2^{<\omega}}$ tel que
 - pour tout $\eta \in 2^\omega$ $\{\phi(x, b_{\eta \upharpoonright \alpha} \mid \alpha < \omega)\}$ est consistant
 - pour tout $\eta, \nu \in 2^{<\omega}$ si $\eta \frown 0 \triangleleft \nu$ alors $\{\phi(x, b_\nu), \phi(x, b_{\eta \frown 1})\}$ est inconsistant.
- 2 On dit que $\phi(x, b)$ Kim-divise sur A s'il existe une extension globale A -invariante $p(x)$ de $tp(b/A)$ et $(b_i)_{i < \omega}$ telle que $b_i \models p \upharpoonright Ab_{<i}$ et $\bigwedge_{i < \omega} \phi(x, b_i)$ est inconsistant.
- 3 On dit que $\phi(x, b)$ Kim-dévie sur A si $\phi(x, b)$ implique une disjonction finie de formule qui Kim-divise sur A .

Definition

Soit T une théorie et $\phi(x, y)$ une formule dans le langage de T .

- 1 On dit que $\phi(x, y)$ a la propriété forte de l'ordre 1 (SOP_1) s'il existe un arbre d'uplets $(b_\eta)_{\eta \in 2^{<\omega}}$ tel que
 - pour tout $\eta \in 2^\omega$ $\{\phi(x, b_{\eta \upharpoonright \alpha} \mid \alpha < \omega)\}$ est consistant
 - pour tout $\eta, \nu \in 2^{<\omega}$ si $\eta \frown 0 \triangleleft \nu$ alors $\{\phi(x, b_\nu), \phi(x, b_{\eta \frown 1})\}$ est inconsistant.
- 2 On dit que $\phi(x, b)$ Kim-divise sur A s'il existe une extension globale A -invariante $p(x)$ de $tp(b/A)$ et $(b_i)_{i < \omega}$ telle que $b_i \models p \upharpoonright Ab_{<i}$ et $\bigwedge_{i < \omega} \phi(x, b_i)$ est inconsistant.
- 3 On dit que $\phi(x, b)$ Kim-dévie sur A si $\phi(x, b)$ implique une disjonction finie de formule qui Kim-divise sur A .
- 4 On définit la Kim-indépendence

$$A \underset{C}{\perp}^K B \iff tp(A/BC) \text{ ne Kim-dévie pas sur } C.$$

$ACF_p G$ dans la carte de l'univers

$NSOP_1$, NTP_2

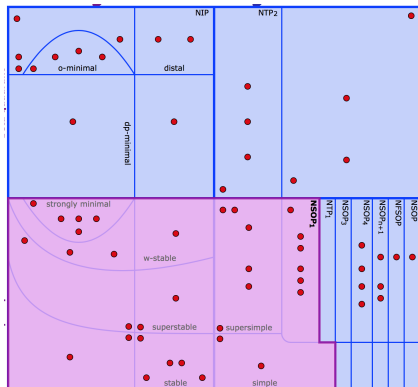


Figure: NSOP1

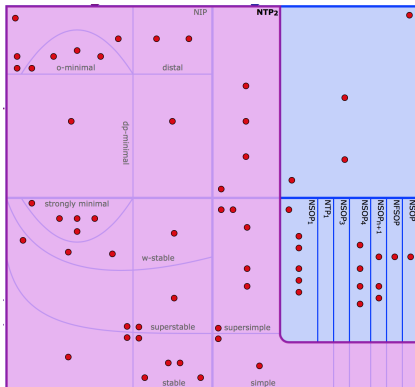


Figure: NTP2

G. Conant *Map of the Universe* <http://www.forkinganddividing.com>

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Relation d'indépendance et $NSOP_1$, Chernikov-Ramsey 2016; Kaplan-Ramsey 2017

Soit \perp une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Relation d'indépendance et $NSOP_1$, Chernikov-Ramsey 2016; Kaplan-Ramsey 2017

Soit \perp une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

- **Symmétrie.**

Si $A \perp_{\mathcal{M}} B$ alors $B \perp_{\mathcal{M}} A$.

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Relation d'indépendance et $NSOP_1$, Chernikov-Ramsey 2016; Kaplan-Ramsey 2017

Soit \perp une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

- **Symmétrie.**
- **Monotonicité.**

Si $A \perp_{\mathcal{M}} BD$ alors $A \perp_{\mathcal{M}} B$.

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Relation d'indépendance et $NSOP_1$, Chernikov-Ramsey 2016; Kaplan-Ramsey 2017

Soit \perp une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

- **Symmétrie.**
- **Monotonicité.**
- **Existence.**

Pour tout modèle \mathcal{M} et a on a $a \perp_{\mathcal{M}} \mathcal{M}$

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Relation d'indépendance et $NSOP_1$, Chernikov-Ramsey 2016; Kaplan-Ramsey 2017

Soit \perp une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

- **Symmétrie.**
- **Monotonicité.**
- **Existence.**
- **Caractère fini fort.** Pour tout modèle \mathcal{M} , si $a \perp_{\mathcal{M}} b$ alors il existe une formule $\phi(x, b, m) \in tp(a/b, \mathcal{M})$ telle que pour tout a' , si $a' \models \phi(x, b, m)$ alors $a' \perp_{\mathcal{M}} b$.

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Relation d'indépendance et $NSOP_1$, Chernikov-Ramsey 2016; Kaplan-Ramsey 2017

Soit \downarrow une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

- **Symmétrie.**
- **Monotonie.**
- **Existence.**
- **Caractère fini fort.**
- **3-amalgamation.**

Pour tout modèle \mathcal{M} s'il existe c_1, c_2 et A, B tels que

- $c_1 \equiv_{\mathcal{M}} c_2$
- $A \downarrow_{\mathcal{M}} B$
- $c_1 \downarrow_{\mathcal{M}} A$ et $c_2 \downarrow_{\mathcal{M}} B$

alors il existe $c \downarrow_{\mathcal{M}} A, B$ tel que $c \equiv_{\mathcal{M}A} c_1$ et $c \equiv_{\mathcal{M}B} c_2$.

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Relation d'indépendance et $NSOP_1$, Chernikov-Ramsey 2016; Kaplan-Ramsey 2017

Soit \perp une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

- **Symmétrie.**
- **Monotonicité.**
- **Existence.**
- **Caractère fini fort.**
- **3-amalgamation.**
- **Témoignage (Witnessing).**

Soient $a, b, (b_i)_{i < \omega}$ et un modèle \mathcal{M} , on suppose que:

- $a \not\perp_{\mathcal{M}} b$, témoigné par $\phi(x, b, m)$
- pour une extension globale \mathcal{M} -invariante p de $tp(b/\mathcal{M})$,
 $b_i \models p \upharpoonright Cb_{<i}$.

Alors $\bigwedge_{i < \omega} \phi(x, b_i, m)$ est inconsistant.

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Relation d'indépendance et $NSOP_1$, Chernikov-Ramsey 2016; Kaplan-Ramsey 2017

Soit \perp une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

- **Symmétrie.**
- **Monotonicité.**
- **Existence.**
- **Caractère fini fort.**
- **3-amalgamation.**
- **Témoignage (Witnessing).**
- **Monotonicité sur la base.**

Pour $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ si $A \perp_{\mathcal{M}} B \mathcal{N}$ alors $A \perp_{\mathcal{N}} B$.

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Relation d'indépendance et $NSOP_1$, Chernikov-Ramsey 2016; Kaplan-Ramsey 2017

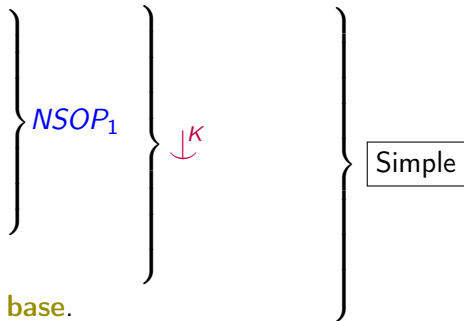
Soit \perp une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

- **Symmétrie.**
- **Monotonicité.**
- **Existence.**
- **Caractère fini fort.**
- **3-amalgamation.**
- **Témoignage (Witnessing).**
- **Monotonicité sur la base.**

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Chernikov-Ramsey (2015) ; Kaplan-Ramsey (2017)

- Symétrie.
- Monotonie.
- Existence.
- Caractère fini fort.
- 3-amalgamation.
- Témoignage.
- Monotonie sur la base.



Complexité combinatoire pour $ACF_p G$

Indépendance faible et forte dans $ACF_p G$

Pour A, B, C algébriquement clos dans un modèle d' $ACF_p G$

Complexité combinatoire pour $ACF_p G$

Indépendance faible et forte dans $ACF_p G$

Pour A, B, C algébriquement clos dans un modèle d' $ACF_p G$

$$A \underset{C}{\downarrow}^w B$$

Complexité combinatoire pour $ACF_p G$

Indépendance faible et forte dans $ACF_p G$

Pour A, B, C algébriquement clos dans un modèle d' $ACF_p G$

$$A \downarrow_C^w B \iff A \downarrow_C^{ACF} B \text{ et}$$

Complexité combinatoire pour $ACF_p G$

Indépendance faible et forte dans $ACF_p G$

Pour A, B, C algébriquement clos dans un modèle d' $ACF_p G$

$$A \downarrow_C^w B \iff A \downarrow_C^{ACF} B \text{ et } G(\overline{AC} + \overline{BC}) = G(\overline{AC}) + G(\overline{BC})$$

Complexité combinatoire pour $ACF_p G$

Indépendance faible et forte dans $ACF_p G$

Pour A, B, C algébriquement clos dans un modèle d' $ACF_p G$

$$A \downarrow_C^w B \iff A \downarrow_C^{ACF} B \text{ et } G(\overline{AC} + \overline{BC}) = G(\overline{AC}) + G(\overline{BC})$$

$$A \downarrow_C^{st} B \iff A \downarrow_C^{ACF} B \text{ et } G(\overline{ABC}) = G(\overline{AC}) + G(\overline{BC})$$

Complexité combinatoire pour $ACF_p G$

Indépendance faible et forte dans $ACF_p G$

Pour A, B, C algébriquement clos dans un modèle d' $ACF_p G$

$$A \downarrow_C^w B \iff A \downarrow_C^{ACF} B \text{ et } G(\overline{AC} + \overline{BC}) = G(\overline{AC}) + G(\overline{BC})$$

$$A \downarrow_C^{st} B \iff A \downarrow_C^{ACF} B \text{ et } G(\overline{ABC}) = G(\overline{AC}) + G(\overline{BC})$$

Théorème

- \downarrow^w satisfait **Symmetrie**, **Monotonie**, **Existence**, **Caractère fini fort**, **3-amalgamation** donc $ACF_p G$ est **NSOP₁**. Elle satisfait aussi **Témoignage**, donc \downarrow^w coïncide avec Kim-indépendance au dessus des modèles. \downarrow^w ne satisfait pas **Monotonie sur la base**, donc $ACF_p G$ n'est pas simple.

Complexité combinatoire pour $ACF_p G$

Indépendance faible et forte dans $ACF_p G$

Pour A, B, C algébriquement clos dans un modèle d' $ACF_p G$

$$A \downarrow_C^w B \iff A \downarrow_C^{ACF} B \text{ et } G(\overline{AC} + \overline{BC}) = G(\overline{AC}) + G(\overline{BC})$$

$$A \downarrow_C^{st} B \iff A \downarrow_C^{ACF} B \text{ et } G(\overline{ABC}) = G(\overline{AC}) + G(\overline{BC})$$

Théorème

- \downarrow^w satisfait **Symmetrie**, **Monotonicité**, **Existence**, **Caractère fini fort**, **3-amalgamation** donc $ACF_p G$ est **NSOP₁**. Elle satisfait aussi **Témoignage**, donc \downarrow^w coïncide avec Kim-indépendance au dessus des modèles. \downarrow^w ne satisfait pas **Monotonicité sur la base**, donc $ACF_p G$ n'est pas simple.
- \downarrow^{st} satisfait toutes les propriétés sauf **Caractère fini fort** et **Témoignage**.

Caractère fini fort. $C = \overline{C}$, si $a \not\equiv_C^w b$ alors il existe une formule $\phi(x, b, c) \in tp(a/bC)$ telle que pour tout a' , si $a' \models \phi(x, b, c)$ alors $a' \not\equiv_C^w b$.

$ACF_p G$ n'est pas simple

Remarque sur la preuve

Remarque (3-amalgamation, Chatzidakis-Hrushovski)

Si A, B, C, E sont algébriquement clos, A, B, C contiennent E , avec $C \downarrow_E^{ACF} A, B$ alors

$$(\overline{AC} + \overline{BC}) \cap \overline{AB} = A + B$$

$ACF_p G$ n'est pas simple

Remarque sur la preuve

Remarque (3-amalgamation, Chatzidakis-Hrushovski)

Si A, B, C, E sont algébriquement clos, A, B, C contiennent E , avec $C \downarrow_E^{ACF} A, B$ alors

$$(\overline{AC} + \overline{BC}) \cap \overline{AB} = A + B$$

Remarque (\downarrow^w ne satisfait pas **Monotonie sur la base**)

Soit (K, G) un modèle saturé d' $ACF_p G$.

- 1 Il existe a, b, c algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ tels que $G(\overline{\mathbb{F}_p}(a, b, c)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}) + \langle a \cdot b + c \rangle$.

$ACF_p G$ n'est pas simple

Remarque sur la preuve

Remarque (3-amalgamation, Chatzidakis-Hrushovski)

Si A, B, C, E sont algébriquement clos, A, B, C contiennent E , avec $C \downarrow_E^{ACF} A, B$ alors

$$(\overline{AC} + \overline{BC}) \cap \overline{AB} = A + B$$

Remarque (\downarrow^w ne satisfait pas **Monotonie sur la base**)

Soit (K, G) un modèle saturé d' $ACF_p G$.

- 1 Il existe a, b, c algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ tels que $G(\overline{\mathbb{F}_p}(a, b, c)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}) + \langle a \cdot b + c \rangle$.
- 2 $G(\overline{\mathbb{F}_p}(a) + \overline{\mathbb{F}_p}(b, c)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}(a)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}(a, b)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}(b, c)) = G(\overline{\mathbb{F}_p})$ et $G(\overline{\mathbb{F}_p}(a, b) + \overline{\mathbb{F}_p}(b, c)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}) + \langle a \cdot b + c \rangle$.

$ACF_p G$ n'est pas simple

Remarque sur la preuve

Remarque (3-amalgamation, Chatzidakis-Hrushovski)

Si A, B, C, E sont algébriquement clos, A, B, C contiennent E , avec $C \downarrow_E^{ACF} A, B$ alors

$$(\overline{AC} + \overline{BC}) \cap \overline{AB} = A + B$$

Remarque (\downarrow^w ne satisfait pas **Monotonie sur la base**)

Soit (K, G) un modèle saturé d' $ACF_p G$.

- 1 Il existe a, b, c algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ tels que $G(\overline{\mathbb{F}_p}(a, b, c)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}) + \langle a \cdot b + c \rangle$.
- 2 $G(\overline{\mathbb{F}_p}(a) + \overline{\mathbb{F}_p}(b, c)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}(a)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}(a, b)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}(b, c)) = G(\overline{\mathbb{F}_p})$ et $G(\overline{\mathbb{F}_p}(a, b) + \overline{\mathbb{F}_p}(b, c)) = G(\overline{\mathbb{F}_p}) + \langle a \cdot b + c \rangle$.
- 3 $a \downarrow^w b, c$ et $a \not\downarrow_b^w c$.

Remarque (Plus de propriétés pour \downarrow^w et \downarrow^{st})

En fait, toutes les propriétés satisfaites par \downarrow^w et \downarrow^{st} sont satisfaites sur des ensembles algébriquement clos.

Remarque (Plus de propriétés pour \downarrow^w et \downarrow^{st})

*En fait, toutes les propriétés satisfaites par \downarrow^w et \downarrow^{st} sont satisfaites sur des ensembles algébriquement clos. De plus, \downarrow^w et \downarrow^{st} satisfont **Caractère fini**, **Extension** et **Transitivité**. \downarrow^w satisfait **Caractère Locale** mais \downarrow^{st} ne la satisfait pas. \downarrow^{st} est stationnaire au dessus des ensembles algébriquement clos.*

Remarque (Plus de propriétés pour \downarrow^w et \downarrow^{st})

*En fait, toutes les propriétés satisfaites par \downarrow^w et \downarrow^{st} sont satisfaites sur des ensembles algébriquement clos. De plus, \downarrow^w et \downarrow^{st} satisfont **Caractère fini**, **Extension** et **Transitivité**. \downarrow^w satisfait **Caractère Locale** mais \downarrow^{st} ne la satisfait pas. \downarrow^{st} est stationnaire au dessus des ensembles algébriquement clos.*

Caractère Locale. Pour tout A dénombrable et B quelconque, il existe un ensemble dénombrable $B_0 \subseteq B$ tel que

$$A \downarrow_{B_0} B.$$

Pour $(K, G) \models ACF_p G$, on considère

$$\pi : K \rightarrow K/G.$$

Imaginaires dans $ACF_p G$

3-amalgamation (sur les ensembles algébriquement clos)

Pour $(K, G) \models ACF_p G$, on considère

$$\pi : K \rightarrow K/G.$$

Soit $(K, K/G)$ la structure à 2 sorte, une pour le corps K ,

Imaginaires dans $ACF_p G$

3-amalgamation (sur les ensembles algébriquement clos)

Pour $(K, G) \models ACF_p G$, on considère

$$\pi : K \rightarrow K/G.$$

Soit $(K, K/G)$ la structure à 2 sorte, une pour le corps K , une pour le \mathbb{F}_p -espace vectoriel K/G ,

Imaginaires dans $ACF_p G$

3-amalgamation (sur les ensembles algébriquement clos)

Pour $(K, G) \models ACF_p G$, on considère

$$\pi : K \rightarrow K/G.$$

Soit $(K, K/G)$ la structure à 2 sorte, une pour le corps K , une pour le \mathbb{F}_p -espace vectoriel K/G , et la projection canonique $\pi : K \rightarrow K/G$.

Pour $(K, G) \models ACF_p G$, on considère

$$\pi : K \rightarrow K/G.$$

Soit $(K, K/G)$ la structure à 2 sorte, une pour le corps K , une pour le \mathbb{F}_p -espace vectoriel K/G , et la projection canonique $\pi : K \rightarrow K/G$. Cette structure est interdéfinissable avec (K, G) donc $NSOP_1$.

Pour $(K, G) \models ACF_p G$, on considère

$$\pi : K \rightarrow K/G.$$

Soit $(K, K/G)$ la structure à 2 sorte, une pour le corps K , une pour le \mathbb{F}_p -espace vectoriel K/G , et la projection canonique $\pi : K \rightarrow K/G$. Cette structure est interdéfinissable avec (K, G) donc $NSOP_1$. On peut décrire la Kim-indépendance dans cette structure à deux sortes.

Pour $(K, G) \models ACF_p G$, on considère

$$\pi : K \rightarrow K/G.$$

Soit $(K, K/G)$ la structure à 2 sorte, une pour le corps K , une pour le \mathbb{F}_p -espace vectoriel K/G , et la projection canonique $\pi : K \rightarrow K/G$. Cette structure est interdéfinissable avec (K, G) donc $NSOP_1$. On peut décrire la Kim-indépendance dans cette structure à deux sortes.

Théorème

$(K, K/G)$ a l'élimination faible des imaginaires.

Déviation et Monotonicité sur la base

$$A \downarrow_C^{w^{mon}} B : \iff \forall D \subseteq \overline{BC} \quad A \downarrow_{CD}^w B.$$

Déviation et Monotonie sur la base

$$A \downarrow_C^{w^{mon}} B : \iff \forall D \subseteq \overline{BC} \quad A \downarrow_{CD}^w B.$$

$\downarrow^f / \downarrow^d / \downarrow^p$ = relation d'indépendance de la non déviation/division/thorn-déviation.

$$A \downarrow_C^{w^{mon}} B : \iff \forall D \subseteq \overline{BC} \quad A \downarrow_{CD}^w B.$$

$\downarrow^f / \downarrow^d / \downarrow^b$ = relation d'indépendance de la non déviation/division/thorn-déviation.

Proposition

- 1 $\downarrow^{w^{mon}}$ ne satisfait pas le caractère locale.

$$A \Downarrow_C^{w^{mon}} B : \iff \forall D \subseteq \overline{BC} \quad A \Downarrow_{CD}^w B.$$

$\Downarrow^f / \Downarrow^d / \Downarrow^b$ = relation d'indépendance de la non déviation/division/thorn-déviation.

Proposition

- 1 $\Downarrow^{w^{mon}}$ ne satisfait pas le caractère locale.
- 2 $ACF_p G$ n'est pas épineuse ($\Downarrow^b \upharpoonright K \rightarrow \Downarrow^{w^{mon}}$).

$$A \downarrow_C^{w^{mon}} B : \iff \forall D \subseteq \overline{BC} \quad A \downarrow_{CD}^w B.$$

$\downarrow^f / \downarrow^d / \downarrow^b$ = relation d'indépendance de la non déviation/division/thorn-déviation.

Proposition

- 1 $\downarrow^{w^{mon}}$ ne satisfait pas le caractère locale.
- 2 $ACF_p G$ n'est pas épineuse ($\downarrow^b \uparrow K \rightarrow \downarrow^{w^{mon}}$).
- 3 Soient A, B, C, D algébriquement clos, A, B, D contenant C , $B \subseteq D$.

$$A \downarrow_C^{wmon} B : \iff \forall D \subseteq \overline{BC} \quad A \downarrow_{CD}^w B.$$

$\downarrow^f / \downarrow^d / \downarrow^b$ = relation d'indépendance de la non déviation/division/thorn-déviation.

Proposition

- 1 \downarrow^{wmon} ne satisfait pas le caractère locale.
- 2 $ACF_p G$ n'est pas épineuse ($\downarrow^b \uparrow K \rightarrow \downarrow^{wmon}$).
- 3 Soient A, B, C, D algébriquement clos, A, B, D contenant C , $B \subseteq D$.

si $A \downarrow_C^{wmon} B$ et $A \downarrow_B^{st} D$ alors $A \downarrow_C^{wmon} D$.

$$A \Downarrow_C^{wmon} B : \iff \forall D \subseteq \overline{BC} \quad A \Downarrow_{CD}^w B.$$

$\Downarrow^f / \Downarrow^d / \Downarrow^b$ = relation d'indépendance de la non déviation/division/thorn-déviation.

Proposition

- 1 \Downarrow^{wmon} ne satisfait pas le caractère locale.
- 2 $ACF_p G$ n'est pas épineuse ($\Downarrow^b \upharpoonright K \rightarrow \Downarrow^{wmon}$).
- 3 Soient A, B, C, D algébriquement clos, A, B, D contenant C , $B \subseteq D$.

si $A \Downarrow_C^{wmon} B$ et $A \Downarrow_B^{st} D$ alors $A \Downarrow_C^{wmon} D$.

- 4 $\Downarrow^{wmon} = \Downarrow^f = \Downarrow^d = \Downarrow^b \upharpoonright K$.

Généralisation de la construction

Soient $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, T une \mathcal{L} -théorie complète et $T_0 = T \upharpoonright \mathcal{L}_0$.

Généralisation de la construction

Soient $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, T une \mathcal{L} -théorie complète et $T_0 = T \upharpoonright \mathcal{L}_0$. Soit $\mathcal{L}^S = \mathcal{L} \cup \{S\}$, S un prédicat unaire

Généralisation de la construction

Soient $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, T une \mathcal{L} -théorie complète et $T_0 = T \upharpoonright \mathcal{L}_0$. Soit $\mathcal{L}^S = \mathcal{L} \cup \{S\}$, S un prédicat unaire et soit T^S la \mathcal{L}^S -théorie dont les modèles sont composés d'un modèle \mathcal{M} de T dans lesquels $S(\mathcal{M})$ est une \mathcal{L}_0 -sous structure de $\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ modèle de T_0 .

Généralisation de la construction

Soient $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, T une \mathcal{L} -théorie complète et $T_0 = T \upharpoonright \mathcal{L}_0$. Soit $\mathcal{L}^S = \mathcal{L} \cup \{S\}$, S un prédicat unaire et soit T^S la \mathcal{L}^S -théorie dont les modèles sont composés d'un modèle \mathcal{M} de T dans lesquels $S(\mathcal{M})$ est une \mathcal{L}_0 -sous structure de $\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ modèle de T_0 .

Existence d'une modèle compagne pour T^S .

- 1 T modèle-complète et T_0 a l'élimination des quantificateurs dans \mathcal{L}_0

Généralisation de la construction

Soient $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, T une \mathcal{L} -théorie complète et $T_0 = T \upharpoonright \mathcal{L}_0$. Soit $\mathcal{L}^S = \mathcal{L} \cup \{S\}$, S un prédicat unaire et soit T^S la \mathcal{L}^S -théorie dont les modèles sont composés d'un modèle \mathcal{M} de T dans lesquels $S(\mathcal{M})$ est une \mathcal{L}_0 -sous structure de $\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ modèle de T_0 .

Existence d'une modèle compagne pour T^S .

- 1 T modèle-complète et T_0 a l'élimination des quantificateurs dans \mathcal{L}_0
- 2 T_0 géométrique et modulaire

Généralisation de la construction

Soient $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, T une \mathcal{L} -théorie complète et $T_0 = T \upharpoonright \mathcal{L}_0$. Soit $\mathcal{L}^S = \mathcal{L} \cup \{S\}$, S un prédicat unaire et soit T^S la \mathcal{L}^S -théorie dont les modèles sont composés d'un modèle \mathcal{M} de T dans lesquels $S(\mathcal{M})$ est une \mathcal{L}_0 -sous structure de $\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ modèle de T_0 .

Existence d'un modèle compagne pour T^S .

- 1 T modèle-complète et T_0 a l'élimination des quantificateurs dans \mathcal{L}_0
- 2 T_0 géométrique et modulaire
- 3 pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x, y)$ il existe une \mathcal{L} -formule $\theta_\phi(y)$ telle que pour tout modèle \mathcal{M} de T et $b \in \mathcal{M}$

Généralisation de la construction

Soient $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, T une \mathcal{L} -théorie complète et $T_0 = T \upharpoonright \mathcal{L}_0$. Soit $\mathcal{L}^S = \mathcal{L} \cup \{S\}$, S un prédicat unaire et soit T^S la \mathcal{L}^S -théorie dont les modèles sont composés d'un modèle \mathcal{M} de T dans lesquels $S(\mathcal{M})$ est une \mathcal{L}_0 -sous structure de $\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ modèle de T_0 .

Existence d'une modèle compagne pour T^S .

- 1 T modèle-complète et T_0 a l'élimination des quantificateurs dans \mathcal{L}_0
- 2 T_0 géométrique et modulaire
- 3 pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x, y)$ il existe une \mathcal{L} -formule $\theta_\phi(y)$ telle que pour tout modèle \mathcal{M} de T et $b \in \mathcal{M}$

$\mathcal{M} \models \theta_\phi(b) \iff$ il existe $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et un uplet a de \mathcal{N}
tels que a est indépendant \mathcal{M}
(pour la prégéométrie acl_0) et $\mathcal{N} \models \phi(a, b)$

Alors T^S admet une modèle compagne, on la dénote TS .

Exemple

- *Sous-espace vectoriel générique sur \mathbb{F}_{p^n} . Pour toute théorie modèle complète de \mathbb{F}_{p^n} -espace vectoriel qui élimine \exists^∞ , on peut ajouter des sous \mathbb{F}_{p^n} -espaces vectoriels génériques. Par exemple ACF_p , Psf_p , DCF_p , $ACFA_p$, PAC_p*

Exemple

- **Sous-espace vectoriel générique sur \mathbb{F}_{p^n} .** Pour toute théorie modèle complète de \mathbb{F}_{p^n} -espace vectoriel qui élimine \exists^∞ , on peut ajouter des sous \mathbb{F}_{p^n} -espaces vectoriels génériques. Par exemple ACF_p , Psf_p , DCF_p , $ACFA_p$, PAC_p
- **Sous-groupe multiplicatif.** Prédicat pour un sous-groupe multiplicatif générique d'un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$ (pour $p > 0$ on peut ajouter sous-groupe additif et sous-groupe multiplicatif générique).

Conservation de $NSOP_1$

T est $NSOP_1$ et la Kim-indépendance satisfait : pour tout A, B, C algébriquement clos et Kim-indépendant sur \mathcal{M} , on a

$$acl_0(acl_T(AC), acl_T(BC)) \cap acl_T(AB) = acl_0(A, B)$$

Alors si TS existe, TS est $NSOP_1$. LASSE:

- 1 TS n'est pas simple
- 2 T n'est pas simple ou il existe A, B, C, D algébriquement clos tels que A, B, D contiennent C et $A \perp_C^K BD$, tels que

$$acl_0(A, acl_T(BD)) \cup acl_T(AD) \neq acl_0(acl_T(AD), acl_T(BD)).$$

Conservation de $NSOP_1$

T est $NSOP_1$ et la Kim-indépendance satisfait : pour tout A, B, C algébriquement clos et Kim-indépendant sur \mathcal{M} , on a

$$acl_0(acl_T(AC), acl_T(BC)) \cap acl_T(AB) = acl_0(A, B)$$

Alors si TS existe, TS est $NSOP_1$. LASSE:

- 1 TS n'est pas simple
- 2 T n'est pas simple ou il existe A, B, C, D algébriquement clos tels que A, B, D contiennent C et $A \perp_C^K BD$, tels que

$$acl_0(A, acl_T(BD)) \cup acl_T(AD) \neq acl_0(acl_T(AD), acl_T(BD)).$$

Exemple

Tous les exemples sont $NSOP_1$.

The end

Merci ;)