Théorie des

Ensembles

Table des Matières

Les axiomes de ZFC

On considère un univers $\mathcal{U}$ qui correspondrait à "l'ensemble" de tous les ensembles. On veut que les éléments de $\mathcal{U}$ se comportent comme des ensembles au sens intuitif du terme. Voici les axiomes que l'on va considérer pour que $\mathcal{U}$ se comporte de la bonne façon : (On prend $\mathcal{U}$ comme une $\mathcal{L}_m = \{\in\}$-structure)

1. EXT : (Axiome d'extensionnalité)

$$\forall x \, \forall y \, [\forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y].$$

Deux ensembles égaux vérifient les mêmes relations avec tous les m elts.
On veut ici que deux ensembles ayant les mêmes éléments soient =.
On caractérise donc chaque ensemble par ses éléments.
(Cela implique par exemple que $\{x, x\} = \{x\}$).

2. Axiome de la paire : (PAIRE)

$$\forall x \, \forall y \, \exists z \, \forall t \, [t \in z \leftrightarrow (t = x \text{ ou } t = y)]$$

Il existe un (unique) ensemble qui contient exactement deux ensembles donnés. Cela veut même dire que si a et b sont des ensembles $\{a, b\}$ est un ensemble. En particulier, le singleton $\{a\}$ est un ensemble. Cela implique déjà que $\mathcal{U}$ est infini. Cela implique aussi l'existence de la paire ordonnée $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

3. Axiome de l'union (UN).

$$\forall x \, \exists y \, \forall z \, [z \in y \leftrightarrow \exists t \, (t \in x \text{ et } z \in t)]$$

On note $\bigcup a = \bigcup_{b \in a} b$. Cet axiome implique avec la paire l'ensemble $a \cup b := \bigcup \{a, b\}$.

4. Axiome des parties (PART)

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow z \subseteq x]$$

$a \subseteq b := \forall x (x \in a \rightarrow x \in b)$.

On la note $\mathcal{P}(a)$.

Rque: On peut remarquer que les axiomes que l'on a jusqu'ici impliquent l'existence du produit cartésien :

$$a \times b = \{ x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) \text{ tels que } \varphi_{a,b}(x) \} \quad \text{où } \varphi(x, a, b)$$

est une formule stipulant que x est une paire ordonnée avec le premier élément dans a et le deuxième dans b.

5. Schéma de compréhension (COM)

pour toute formule $\varphi \in \mathcal{L}_\in$:

$$\forall x_1 \dots x_n \quad \forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(x_1 \dots x_n, z))]$$

Il postule que si a est un ensemble et D une classe alors $\{x \in a \mid x \in D\}$ est un ensemble. On définit de manière locale un ensemble à partir de toute formule.

(Autrement dit l'intersection d'une classe et d'un ensemble est un ensemble)

Relations et fonctions sur les ensembles ($\in \mathcal{U}$)

- Une relation binaire sur un ensemble $a \in \mathcal{U}$ est un ensemble de paires ordonnées, autrement dit un sous ensemble de $a \times a$. On pose

$$\operatorname{dom} R = \{ x \in a \quad \exists y\, (x,y) \in R \}$$

$$\operatorname{Im} R = \{ y \in a \quad \exists x\, (x,y) \in R \}$$

- Une fonction f est une relation telle que

$$\forall x, \forall y_1 \forall y_2 [((x,y_1) \in f \text{ et } (x,y_2) \in f) \longrightarrow y_1 = y_2]$$

Une fonction est une relation unique à droite.

- Soit $I \in \mathcal{U}$, $(a_i)_I$ une famille d'ensembles (i.e. donnée par une fct de domaine I)

alors $\prod_I (a_i) = \{ f : I \rightarrow \bigcup_I a_i \mid g(i) \in a_i \ \forall i \in I \}$

Cet ensemble se définit autrement pour "être en fait" se définit en premier ordre.

<u>Classes</u> : On travaille dans un univers, une collection $\mathcal{U}$ d'éléments. On peut concevoir des parties ou sous-univers de $\mathcal{U}$, on appellera ces parties des classes (se définit par une formule du 1^er ordre). De temps en temps les classes seront des ensembles (ex : $a, b \in \mathcal{U}$ ou $\{a,b\} \subseteq \mathcal{U}$ c'est donc une classe mais l'axiome de la paire nous dit que c'est un ensemble donc $\{a,b\} \in \mathcal{U}$, autrement dit $\mathcal{U}$ est "stable par prise de la paire").

A chaque ensemble $b \in \mathcal{U}$ correspond une classe : $\{c \in \mathcal{U}, c \in b\}$

$\{c \in \mathcal{U} \mid c \in b\} \subseteq \mathcal{U}$ c'est une classe mais cette classe a exactement les mêmes éléments que b donc l'axiome d'extensionnalité nous dit que c'est un ensemble.

<u>Classe fonctionnelle</u> : $F \subseteq \mathcal{U}^2$ est une <u>classe fonctionnelle</u>

s'il existe une $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$-formule $\varphi(x, y)$ définissant F et telle que $\mathcal{U} \models \forall x \forall x_1 \forall x_2 \left(\varphi(x, x_1) \wedge \varphi(x, x_2) \longrightarrow x_1 = x_2 \right)$

La classe F est alors $\varphi[\mathcal{U}^2]$

$\mathrm{Dom}\, F = \exists y \varphi[\mathcal{U}]$
$\mathrm{Im}\, F = \exists x \varphi[\mathcal{U}]$

<u>exemples</u> : $x \longmapsto P(x)$; $x \longmapsto \{x\}$.

Les classes sont des parties de $\mathcal{U}$ liées par une formule, soit $\varphi[\mathcal{U}]$. Toute partie de $\mathcal{U}$ n'est pas une classe, il faut que la formule soit du premier ordre.

<u>Exemple</u> : $\varphi(x) = x \notin x$ $\quad \varphi[\mathcal{U}]$ est une classe propre.

6) <u>Schéma de Remplacement</u> (REM)

Pour toute formule $\varphi(x, y, z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{L}_\in$

$$\forall z_0 \dots z_n \Big\{ \overbrace{\forall x, y_1 y_2 \big[(\varphi(x, y_1, z_1 \dots z_n) \wedge \varphi(x, y_2, z_1 \dots z_n)) \to y_1 = y_2 \big]}^{\varphi \text{ définit une classe fonctionnelle } F}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\exists z_{n+1} \forall y \, (y \in z_{n+1} \leftrightarrow \exists x \in z_0 \wedge \varphi(x, y, z_1 \dots z_n))}_{z_{n+1} = F(z_0) \text{ est un ensemble}} \Big\}$$

Ce schéma exprime que l'image d'une classe fonctionnelle est un ensemble. Si $F \subseteq \mathcal{U}^2$ classe fonctionnelle, $a \in \mathcal{U}$ alors $F[a] := \{ b \mid \exists c \in a, (c, b) \in F \}$ est un ensemble.
((!!) image de a par la fonction mais image de l'ensemble a, l'ensemble des images des éléments de a)

7) <u>Axiome de l'infini</u> (INF)

$$\exists x \, (\emptyset \in x \wedge \forall y \, (y \in x \to s(y) := y \cup \{y\} \in x)).$$

Il postule l'existence d'un ensemble <u>inductif</u> (i.e. stable par s)
(inductif = infini au sens des ensembles)

8) <u>Axiome de Fondation</u> : (FON)

$$\forall x \, (\neg x = \emptyset \to \exists z \, (z \in x \wedge z \cap x = \emptyset))$$

Il exprime que la relation binaire $\in$ sur ~~x~~ x est bien fondée,
(c'est à dire que $\forall y \subseteq x$ il existe un élément minimal dans y).

<u>remarque</u> : Fondation + paire $\models \neg \exists x \; x \in x$. (si $x \in x$, alors $x \in x \cap \{x\}$ donc FON échoue pour l'ensemble $\{x\}$).

9) <u>Axiome du choix</u> (AC) : $\forall f \, [\mathrm{Fct}(f) \wedge \emptyset \notin \mathrm{Im} f] \Rightarrow \big[\exists g \, (\mathrm{Fct}(g) \wedge \underbrace{\mathrm{dom}(g)}_{= \mathrm{dom} f} \wedge \forall x \, (x \in \mathrm{dom}\, g \to g(x) \in f(x))\big]$

On travaille sur une expansion par def de $\mathcal{L}_\in$, qui contient $\subseteq$, ~~$\not\subseteq$~~ $\boxed{3}$

$\cup$, $\cap$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\bigcup \cdot$, $\mathcal{P}(\cdot)$, $\mathrm{dom}(\cdot)$, $\mathrm{Im}(\cdot)$ ... $\emptyset$, ...

On pose $ZF = \{EXT, UN, PART, REM, INF, FON\}$

$ZF^- = \{EXT, UN, PART, REM, INF\}$

$Z = \{EXT, UN, PART, COM, INF, FON\}$

$Z^- = \{EXT, UN, PART, COM, INF\}$

$ZFC = ZF \cup \{AC\}$ $\quad ZFC^- = ZF^- \cup \{AC\}$

Lemme : (1) $REM \Rightarrow COM$

(2) $\left\{\begin{array}{l} PART \\ REM \end{array}\right. \Rightarrow PAIRE$

Preuve : (1) $\varphi(x, z_1 \dots z_n)$ une formule alors on retrouve COM avec φ en utilisant REM avec $\tilde{\varphi}(x, y, z_1 \dots z_n) = x = y \wedge \varphi(y, z_1 \dots z_n)$.

(2) $\emptyset \neq \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. On définit la classe fonctionnelle F par

$$\varphi(x,y) := [(x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x = \{\emptyset\} \wedge y = b)]$$

avec a, b deux ensembles

On a alors $F[\{\emptyset, \{\emptyset\}\}] = \{a, b\}$.

Ordinaux [suite de ZFC]

[On se place dans ZF⁻]

Déf : • $\alpha \in \mathcal{U}$ est un ordinal si α est transitif et $\in_{|\alpha\times\alpha}$ est une relation de bon ordre.

• transitif : $\in$ est transitive sur : $x \in y \in \alpha \Rightarrow x \in \alpha$

ou encore $x \in \alpha \Rightarrow x \subseteq \alpha$.

• bon ordre : { • tout élément de α admet un élément minimal pour $\in$. (bien fondé)
{ • totalement ordonné

• toute partie admet un élément minimal.

Proposition : (α, β ordinaux) (1) $\emptyset$ est un ordinal

(2) $\emptyset \neq \alpha$ alors $\emptyset \in \alpha$

(3) $\alpha \notin \alpha$

(4) $x \in \alpha$ alors $S_{<x} = \{ y \in \alpha \mid y \overset{\in}{<} x \} = x$

(5) $x \in \alpha$ alors x est un ordinal

(6) $\beta \subseteq \alpha$ ssi ($\beta \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$)

(7) $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal, noté α^+.

Proposition : Soit x un ensemble d'ordinaux.

Alors $\bigcap_{\alpha \in x} \alpha$ est un élément minimal de x.

Théorème : α, β deux ordinaux alors une et une seule des propriétés est vraie : $\alpha \in \beta$ $\quad \alpha = \beta \quad$ $\beta \in \alpha$.

Lemme : 1) Il existe une $\mathcal{L}_\in$-formule $\mathrm{Ord}(x)$ telle que

$\mathcal{U} \models \mathrm{Ord}[b]$ ssi b est un ordinal

On pose $\mathrm{Ord} = \mathrm{Ord}[\mathcal{U}]$

2) Ord est totalement ordonné par $\in$.

3) $D \subseteq \mathrm{Ord}$ $D \neq \emptyset$ alors D admet un plus petit élément.

Preuve : ① : ok ② thm precedent ③ Si $D \subseteq \mathrm{Ord}$ soit $\alpha \in D$ alors si α est minimal, ok, sinon $\alpha \cap D \subseteq \alpha$ et α bien ordonné donc il y a un élément minimal dans α et c'est le plus petit élément de D. ∎

Théorème : Ord est une classe propre. (Burali-Forti)

Preuve : Si Ord était un ensemble, alors par précédent Ord est transitif : si $\alpha \in \mathrm{Ord}$ $\beta \in \alpha$ comme α est un ord β est un ordinal donc $\beta \in \mathrm{Ord}$. Bien ordonné : Lemme 3). ∎
[La contradiction est que Ord serait un ordinal mais bien fondé]

Prop : Soit X un ensemble d'ordinaux. Alors $\bigcup X$ est un ordinal majorant X.

Prop - Def : CLASSE : $\lambda \neq \emptyset$ un ordinal

(i) $\lambda = \bigcup \lambda$

(ii) λ n'est pas successeur.

On dit dans ce cas que λ est un ordinal limite.

Preuve : (ii) $\Rightarrow$ (i) Comme λ est transitif, on a $\forall x \in \lambda$ $x \subseteq \lambda$ donc $\bigcup_{x \in \lambda} x \subseteq \lambda$ donc $\bigcup \lambda \subseteq \lambda$.

On pose $\beta = \bigcup \lambda$ et on suppose que $\beta \in \lambda$ i.e. $\beta \in \lambda$.

On a donc $\beta^+ \in \lambda$ puisque λ n'est pas limite.

Donc $\beta^+ \subseteq \bigcup \lambda = \beta$ contradiction ok $\lambda = \bigcup \lambda$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si $\lambda = \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ on a $\bigcup \lambda = \bigcup (\alpha \cup \{\alpha\}) = \alpha$

Un ordinal fini est un ordinal qui n'est pas limite et dont aucun élément n'est limite.

ex : $\omega+1$ n'est pas limite mais n'est pas fini.

Rappel : Un ensemble inductif est un ensemble stable par s.

<u>Proposition</u> : (1) Il existe un ensemble inductif inclus dans tout ensemble inductif, on le note ω.

(2) <u>Induction dans ω</u> : Si $x \subseteq \omega$ et si $\emptyset \in x$ et

$$\forall y \quad y \in x \rightarrow y \cup \{y\} = s(y) \in x$$

Alors $x = \omega$.

(3) ω est un ordinal, c'est le plus petit ordinal limite.

(4) $\omega = \{$ ordinaux finis $\}$.

<u>Preuve</u> : (1) Pour n'importe quel ensemble inductif ω_0 on pose

$$\omega := \{ y \in \omega_0 \mid \forall x \quad x \text{ inductif} \Rightarrow y \in x \}$$

- $\emptyset \in$ à tout ensemble inductif donc $\emptyset \in \omega$.
- si $y \in \omega$, $y \in$ tout ensemble inductif donc $s(y)$ est dans tout ensemble inductif donc $s(y) \in \omega$.

⊠

(2) Par définition de ω : minimalité.

<u>Remarque</u> : • Un ordinal est inductif ssi il est limite.

- La formule $\forall \alpha\ \varphi(\alpha)$ signifie $\forall \alpha\ \varphi(\alpha) \wedge \mathrm{Ord}(\alpha)$
- On définit la formule $\mathrm{Lim}(x)$ x est un ordinal limite.
- si $\alpha = \beta^+$ $\quad \bigcup \alpha = \beta$ $\quad$ i.e. $\sup \alpha^+ = \alpha$

  si α limite $\quad \bigcup \alpha = \alpha$ $\quad$ i.e. $\sup \lambda = \lambda$

Théorème : (Principe d'induction transfinie)

Soit φ une $\mathcal{L}_\in$ formule avec $U \vdash ZF^-$. Alors

$$U \vdash \left[\varphi(\emptyset) \wedge \forall\gamma\,(\varphi(\gamma) \to \varphi(\gamma^+)) \wedge \forall\alpha\,(\mathrm{Lim}\,\alpha \wedge \forall\beta\,(\beta < \alpha \to \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha))\right] \to \forall\alpha\,\varphi(\alpha).$$

Autrement dit si :
- $\varphi(\emptyset)$
- $\varphi(\alpha) \to \varphi(\alpha^+)$ (pour les ordinaux non limite)
- Si $\forall\beta \in \alpha\ \varphi(\beta)$ alors $\varphi(\alpha)$. (pour les ordinaux limite)

Alors on a $\varphi(\alpha)$ $\forall\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Remarque : C'est équivalent à

$$U \vdash \left[\forall\gamma\,(\forall\beta\,(\beta < \gamma \to \varphi(\beta)) \to \varphi(\gamma))\right] \to \forall\gamma\,\varphi(\gamma).$$

en effet la condition $\forall\gamma\,(\varphi(\gamma) \to \varphi(\gamma^+))$ est contenue dans la condition $(\forall\beta\,(\beta < \gamma \to \varphi(\beta)) \to \varphi(\gamma))$ puisque tout ordinal non limite est élt./inclus dans un ordinal limite.

Preuve : Soit B la classe des ordinaux ne satisfaisant pas φ. Si B est non vide il contient bien un plus petit élément. Cet élément est un ordinal qui n'est pas vide, qui n'est pas successeur et qui n'est pas limite, ce qui est absurde. ∎

Théorème : (Définition par induction transfinie)

Soit G une classe fonctionnelle en $n+1$ variables. G donnée par $\varphi(x_1 \dots x_{n+1}, y)$ tq $\mathcal{U} \models \forall \bar{x}\, \exists! y\, \varphi$.

Alors il existe une unique classe fonctionnelle F de domaine $\mathcal{U}^n \times \mathrm{Ord}$ telle que :

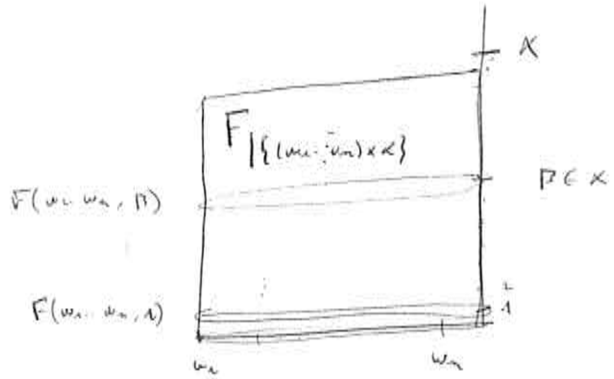
$$F(w_1 \dots w_n, \alpha) = G(w_1 \dots w_n, F_{|\{(w_1 \dots w_n) \times \alpha\}})$$

pour tout $(w_1 \dots w_n) \in \mathcal{U}^n$ et tout ordinal α.
paramètres

<u>Remarques</u> : • On a $G(x_1 \dots x_{n+1}) = y \Leftrightarrow \varphi(x_1 \dots x_{n+1}, y)$.

Donc $G : \mathcal{U}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{U}$, donc $F : \mathcal{U}^n \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathcal{U}$.

• On a $F_{|\{(w_1 \dots w_n) \times \alpha\}} \in \mathcal{U}$ donc $G(w_1 \dots w_n, F_{|\{(w_1 \dots w_n)\times\alpha\}})$ a bien un sens. De plus on peut voir le dessin suivant



<u>Preuve</u> : cf "Induction transfinie" p 13. ⊠

Théorème : (Classification des bons ordres par les ordinaux)

> Tout bon ordre $(X, <)$ est isomorphe à un ordinal. De plus l'isomorphisme et l'ordinal sont uniques.

Exemple : (Toute fonction croissante et continue $Ord \longrightarrow Ord$ admet un pt fixe)

Soit $\theta : Ord \longrightarrow Ord$ une classe fonctionnelle strictement croissante et continue (ie λ limite : $\theta(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} \theta(\gamma) = \sup\{\theta(\gamma) \gamma<\lambda\}$)

1. On montre que $\{\theta^n(x) \mid n \in \omega\}$ est un ensemble. (pour $x \in Ord$)

Pour déf... par induction transfinie on trouve $F : Ord \to Ord$ telle que $F[\omega] = \{\theta^n(x) \mid n \in \omega\}$. On voudrait donc définir

$$\underset{=F(\omega)}{} F(0) = x \text{ et } F(n+1) = \theta(F(n)) = \theta\left(F\left(\bigcup n+1\right)\right)$$
$$= \theta\Big(\underbrace{F_{|n+1}}_{\text{fonction } \in \mathcal{U}}\left(\bigcup n+1\right)\Big)$$

Il paraît donc naturel de considérer :

$$G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$
$$f \longmapsto \begin{cases} \theta(f(\bigcup \mathrm{Dom}\, f)) & \text{si } f \text{ est une fonction dont le domaine est un ordinal} \neq \emptyset \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit ensuite $F(\gamma) = G(F_{|\gamma})$ par induction transfinie.

On a donc $F(0) = G[0) = G(\emptyset) = x$.

$$F(n+1) = G(F_{|n+1}) = \theta(F_{|n+1}(\overset{n}{\overset{\shortparallel}{\bigcup n+1}}))$$

$$= \theta(F_{|n+1}(n)) = \theta(F(n)) = \theta^{n+1}(x).$$

On a donc $F(\omega) = \{\theta^n(x), n \in \omega\}$.
est un ensemble par remplacement. (REM)

2. Soit $\beta = \sup\{\theta^n(x), n \in \omega\}$. Alors pour tout $\gamma < \beta$, $\theta(\gamma) < \beta$

Soit $\gamma < \beta$. ~~Comme β est un ordinal~~ comme $\beta = \bigcup \{\theta^n(x)\, n \in \omega\}$ donc il existe $\theta^n(x)$ avec $\gamma = \theta^n(x)$ et donc $\theta(\gamma) = \theta^{n+1}(x)$ et $\theta^{n+1}(x) \in \beta$ et donc $\theta(\gamma) < \beta$

3. On montre que si $\theta(\alpha) \neq \alpha$, β est un ordinal limite.

On sait que toute fonction croissante Ord → Ord vérifie $\theta(\alpha) \geq \alpha$.

En effet en considérant $\{\gamma \in \mathrm{Ord} \mid \theta(\gamma) < \gamma\} \neq \emptyset$, cet ensemble admet un élément minimal γ_0 mais alors $\delta = \theta(\gamma_0)$ vérifie $\delta < \gamma_0$ et $\theta(\delta) < \delta$ ce qui contredit la minimalité. Donc l'ensemble est vide et donc $\theta(\gamma) \geq \gamma$.

Donc si $\theta(\alpha) \neq \alpha$ on a $\theta(\alpha) > \alpha$ et donc $\theta^n(\alpha) > \theta^{n-1}(\alpha)$ $\forall n \in \omega$ et donc $(\theta^n(\alpha))_{n\in\omega}$ est croissante strictement.

Montrons que $\beta = \cup\beta$. Clairement $\cup\beta \subseteq \beta$. Soit donc $\gamma \in \beta$. On a donc $\gamma < \theta^n(\alpha)$ et donc $\gamma < \cup\{\theta^n(\alpha) \mid n \in \omega\}$ et donc $\beta = \cup\beta$.

4. On montre que θ a un point fixe.

On a déjà vu que $\theta(\gamma) \geq \gamma$ $\forall \gamma \in \mathrm{Ord}$. Donc $\theta(\beta) \geq \beta$. ~~Soit donc $\gamma \in \theta(\beta)$~~

Par continuité de θ, comme β est limite, on a

$$\theta(\beta) = \sup\{\theta(\theta^n(\alpha)) \; ; \; \theta^n(\alpha) \in \beta\}$$

$$= \sup\{\theta^n(\alpha), \; n \in \omega\} = \beta.$$

Donc θ a bien un point fixe.

N.B.: On peut même montrer que l'"ensemble" des points fixes de θ est une classe propre : On constate d'abord que pour tout ordinal α il existe un point fixe β_α avec $\alpha \leq \beta_\alpha$. Si les points fixes de θ formaient un ensemble, cet ensemble contiendrait Ord et Ord serait alors un ensemble, ce qui est contradiction.

N.B.: Dans le schéma de remplacement on doit considérer $F[\alpha]$ mais si α est un ordinal et F croissante et continue $F[\alpha] = \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ et $F(\alpha) \supseteq \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ car $\beta < \alpha \Rightarrow F(\beta) \in F(\alpha)$

et $F[\alpha]$ ... $F(\beta) \mid \beta < \alpha$ ...

Exemple : Un ordinal limite λ qui est le λ-ième ordinal limite

L'idée est de construire la fonction F qui à α associe le α-ième ordinal limite. Comme "être un ordinal limite" s'exprime en premier ordre dans $\mathcal{U}$, on définit :

$$G : \begin{array}{c} \mathcal{U} \longmapsto \mathcal{U} \\ f \longmapsto \end{array} \begin{cases} \text{le plus petit ordinal limite strictement plus grand que } \underbrace{\text{tous les éléments de } \mathrm{Im} f}_{\text{i.e. } > \bigcup \mathrm{Im} f}, \text{ si } \mathrm{Im} f \text{ est un ensemble d'ordinaux} \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit $F(\alpha) = G(F_{|\alpha})$ = le plus petit ordinal limite $>$ ~~...~~ β bien ordinal limite pour $\beta < \alpha$
(récurrence transfinie)

Montrons que F est continue. Soit λ un ordinal limite.

Soit $A = \sup\{F(\beta),\ \beta < \lambda\} = \bigcup_{\beta \in \lambda} F(\beta)$.

On veut montrer que $F(\lambda) = A$.

On a par construction que $F(\lambda) > F(\beta)$ pour $\beta < \lambda$.

On a donc que $F(\lambda) \geq A$.

De plus si $\gamma \in F(\lambda)$ alors $\gamma < F(\lambda)$ et comme $F(\lambda)$ est le plus petit ordinal limite $> F(\beta)$ pour $\beta \in \lambda$, il existe un $\beta \in F(\lambda)$ tel que $\gamma \leqslant F(\beta)$ et donc $\gamma < A$. On a bien $F(\lambda) \subseteq A$ et donc $F(\lambda) = A$. Ainsi F est continue. Clairement croissante par construction, on a donc bien l'existence d'un point fixe et même d'un nombre [illegible] de points fixes vu que l'ensemble des points fixes forme une classe propre.

Induction transfinie

On rappelle que pour un ordinal si il n'est pas successeur, il est limite. Ainsi pour tout $\alpha \in Ord$, soit $\alpha = \emptyset$ soit α est successeur ($\alpha = \gamma^+$) soit α limite (exprimable en 1 ordre).
Cette simple remarque mène au principe (dans $\mathcal{U} \models ZF$) de l'induction transfinie :

Théorème : Soit φ une $\mathcal{L}_\in$ formule. Alors

$$\mathcal{U} \models [\varphi(\emptyset) \wedge \forall \gamma (\in Ord)(\varphi(\gamma) \rightarrow \varphi(\gamma^+)) \wedge \forall \alpha (Lim(\alpha) \wedge \forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha)] \longrightarrow \forall \alpha\, \varphi(\alpha)$$

Autrement dit si

- $\mathcal{U} \models \varphi(\emptyset)$
- $\mathcal{U} \models \varphi(\alpha) \Rightarrow \mathcal{U} \models \varphi(\alpha^+)$
- $\mathcal{U} \models \varphi(\delta)\ \forall \delta < \lambda$ limite $\Rightarrow \mathcal{U} \models \varphi(\lambda)$

Alors $\mathcal{U} \models \forall \alpha (\in Ord)\ \varphi(\alpha)$

La preuve est la propriété des ordinaux puisque tout ordinal est soit nul soit successeur soit limite.
Ce théorème permet une définition très utile de classe fonctionnelle. On rappelle qu'une classe fonctionnelle est un méta-ensemble (on ne crée un ensemble définissable) de $\mathcal{U}^n$, que l'on peut voir comme une fonction $\mathcal{U}^k \rightarrow \mathcal{U}$.
L'idée est qu'une formule φ définit une partie de $\mathcal{U}$
$\varphi[\mathcal{U}] = \{x \in \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \models \varphi[x]\}$, que l'on appelle une classe.
Une classe peut être un sous ensemble de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ donc cela peut définir un graphe et donc des fonctions que l'on appellera <u>classes fonctionnelles</u> $\mathcal{U}^n \longrightarrow \mathcal{U}$ pour éviter toute confusion

avec une partie de $x \times y$, $x, y \in \mathcal{U}$ que l'on peut aussi voir comme une fct $x \longmapsto y$ (identification à son graphe).

On définit en général une classe fonctionnelle

$$G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U} \quad \text{par la formule du 1er ordre}$$

associée φ_G tq "$G(x) = y$" ssi $\mathcal{U} \models \varphi(x, y)$.

(on a en particulier besoin que $\mathcal{U} \models \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,y') \rightarrow y = y'$).

Enfin, pour $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ on peut considérer, pour $X \subseteq \mathcal{U}$ $F_{|X}$. Si il s'avère que $X \in \mathcal{U}$, on peut voir $F_{|X}$ comme <u>un élément de $\mathcal{U}$</u> car $F_{|X} \subseteq X \times \operatorname{Im} F_{|X}$ et $\operatorname{Im} F_{|X} = F[X]$ est un élément de $\mathcal{U}$ par <u>axiome de remplacement</u>. Cette remarque s'avèrera utile pour la suite.

Théorème (Définition par induction transfinie)

> Soit G une classe fonctionnelle en $n+1$ variables $\mathcal{U}^{n+1} \rightarrow \mathcal{U}$.
> Alors il existe une unique classe fonctionnelle F de domaine $\operatorname{Dom}(F) = \mathcal{U}^n \times \mathrm{Ord}$ tq
>
> $$F(\bar{x}, \alpha) = G(\bar{x}, F_{|\{\bar{x}\} \times \alpha})$$
>
> pour tout $\bar{x} \in \mathcal{U}^n$ et tout $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

<u>N.B.</u>:
- $G : \mathcal{U}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{U}$ et $F : \mathcal{U}^n \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathcal{U}$.
- $F_{|\{\bar{x}\} \times \alpha} \subseteq \underbrace{\{\bar{x}\} \times \alpha}_{\text{ensemble par partie}} \times \underbrace{\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}}_{\text{ensemble par remplacement}}$
- $\bar{x}$ n'est qu'un paramètre. L'idée est de construire la valeur de $F(\alpha)$ par l'application de la classe fonctionnelle G sur l'<u>ensemble</u> (par remplacement) des valeurs prises par F sur α, i.e. sur l'ensemble $\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ qui est alors <u>$F[\alpha]$</u> (et <u>non $F(\alpha)$</u>). (En théorie des modèles il faut faire attention car $F(\alpha)$ désigne l'image de l'élément $\alpha \in \mathcal{U}$ alors $F[\alpha]$, l'image ... l'ensemble (...) des

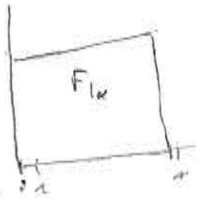
image des éléments de α.)

• Souvent on utilisera le théorème sans paramètre ; c'est d'ailleurs cette version que l'on va prouver (pour alléger les preuves de notation).
Autrement dit, on se donne une classe fonctionnelle $G : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ il existe alors une unique classe fonctionnelle $F : \mathrm{Ord} \to \mathcal{U}$ tq

$$F(\alpha) = G\left(F_{|\alpha}\right)$$

$F_{|\alpha}$ est vu comme le graphe de F restreint à α, soit

$$\left\{ (\beta, F(\beta)) \ ; \ \beta < \alpha \right\}$$



C'est un ensemble car par remplacement, $F[\alpha] = \{F(\beta), \beta<\alpha\}$ est un ensemble, donc $\{(\beta, F(\beta)) \ ; \ \beta < \alpha\}$ est bien un ensemble, on peut donc lui appliquer G.

Souvent on aura besoin pour définir explicitement G de certaines informations de $F_{|\alpha}$, comme $\alpha = \mathrm{Dom}\, F_{|\alpha}$. En effet $F_{|\alpha}$ peut aussi être vu comme une fonction $\alpha \to \mathrm{Im}\, F_{|\alpha}$.
On a aussi $\bigcup \alpha = \bigcup \mathrm{Dom}\, F_{|\alpha}$ et si $\alpha = \gamma^+$, $\bigcup \alpha = \gamma$
si α limite $\bigcup \alpha = \alpha$.

• Dans "Ordinaux" (p12) il y a des exemples de constructions transfinies.

On prouve à présent le théorème.

<u>Preuve de définition par induction transfinie</u> :

L'idée est de définir la <u>classe fonctionnelle</u> F par des <u>fonctions</u> ($\in \mathcal{U}$) qui auront la bonne propriété. Pour faire simple pour calculer $F(\alpha)$ on va avoir une <u>fonction</u> $f_{\alpha+}$ de <u>domaine</u> α^+, et alors $\alpha \in \alpha^+ = \mathrm{dom}\, f_{\alpha+}$ et on définira $F(\alpha)$ par $f_{\alpha+}(\alpha)$. On va "approximer" F par des fonctions $\in \mathcal{U}$, ce qui est correct car $F \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ puisque c'est une classe fonctionnelle.

Pour chaque $\alpha \in \mathrm{Ord}$ on va construire une fonction f_α unique, de domaine α telle que

$$f_\alpha(\beta) = G(f_{\alpha|\beta}) \quad \forall \beta \in \mathrm{dom}\, f_\alpha = \alpha$$

On établira donc leur existence par induction transfinie.

Soit $\Psi(\alpha, f) =$ "f est une fct de domaine α"

$$\wedge \ \forall \beta \ [\beta < \alpha \rightarrow \text{"} f(\beta) = G(f_{|\beta})\text{"}]$$

Tout est définissable en premier ordre, car le f considéré est bien un élément de $\mathcal{U}$ (un graphe, $\subseteq \alpha \times u$).

Ce que l'on veut montrer par induction transfinie est que

$$\mathcal{U} \models \forall \alpha \in \mathrm{Ord} \ \exists! f \ \Psi(\alpha, f). \qquad (\dagger)$$

On remarque, et c'est important, que f et F sont uniquement déterminés par G, elles sont donc uniques, la première en tant qu'élément de $\mathcal{U}$, la deuxième en tant que classe fonctionnelle $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$.

En supposant que $(\dagger)$ soit montrée, on peut définir F par la formule suivante "$y = F(x)$" si

$$\mathcal{U} \models \varphi(x, y) \text{ avec}$$

$$\varphi(x, y) = \forall f \ \Psi(x^+, f) \rightarrow \text{"} f(x) = y\text{"}$$

Moins formellement, on cherche la valeur de $F : \mathrm{Ord} \rightarrow \mathcal{U}$ en α, et on dispose de $f_{\alpha^+} : \alpha^+ \rightarrow \mathrm{Im}\, f_{\alpha^+}$ tq $\forall \beta \in \alpha^+$ $f_{\alpha^+}(\beta) = G(f_{\alpha^+|\beta})$, en particulier car $\alpha \in \alpha^+$ on dispose de $f_{\alpha^+}(\alpha)$ qui est définit donc F (mais le domaine de f est un élément de $\mathcal{U}$ alors que celui de F est une classe $\subseteq \mathcal{U}$).

On montre donc (†) par induction sur $\alpha \in \mathrm{Ord}$

- pour $\alpha = \emptyset$ on pose $f = \emptyset$ on a clairement $\mathcal{U} \models \Psi[\emptyset, \emptyset]$.
($\emptyset$ est une fct de domaine $\emptyset$).
- pour $\alpha = \gamma^+$

On dispose de f_γ unique tq $\mathcal{U} \models \Psi[\gamma, f_\gamma]$. On veut définir f_α de façon à ce que le domaine soit α (on rajoute γ au domaine de f_γ qui est γ, le nouveau domaine sera donc $\gamma \cup \{\gamma\} = \alpha$). et la valeur de f_α en γ doit être $G(f_{|\gamma})$ qui est $G(f_\gamma)$ puisque $\mathrm{dom}\, f_\gamma = \gamma$. On pose donc

$$f_\alpha := f_\gamma \cup \{(\gamma, G(f_{|\gamma}))\} \quad \left(\begin{matrix}\text{uniquement}\\ \text{déterminé}\end{matrix}\right)$$

On a bien $\mathcal{U} \models \Psi(\alpha, f_\alpha)$ donc $\mathcal{U} \models \exists! f\, \Psi(\alpha, f)$

- pour α limite : par hypothèse d'induction, on a pour $\forall \beta < \alpha$ $\mathcal{U} \models \exists! f \Psi[\beta, f]$ on note f_β tq $\mathcal{U} \models \Psi[\beta, f_\beta]$.

On veut alors définir une fonction de domaine $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$

Soit donc $X_\alpha = \{ f_\beta \mid \beta < \alpha \}$

X_α est un ensemble : en effet comme on a $\mathcal{U} \models \exists! f \Psi[\beta, f]$ la classe fonctionnelle $\beta \longmapsto f_\beta$ a pour image un élément de $\mathcal{U}$ par l'axiome de remplacement, cette image est exactement l'ensemble X_α.

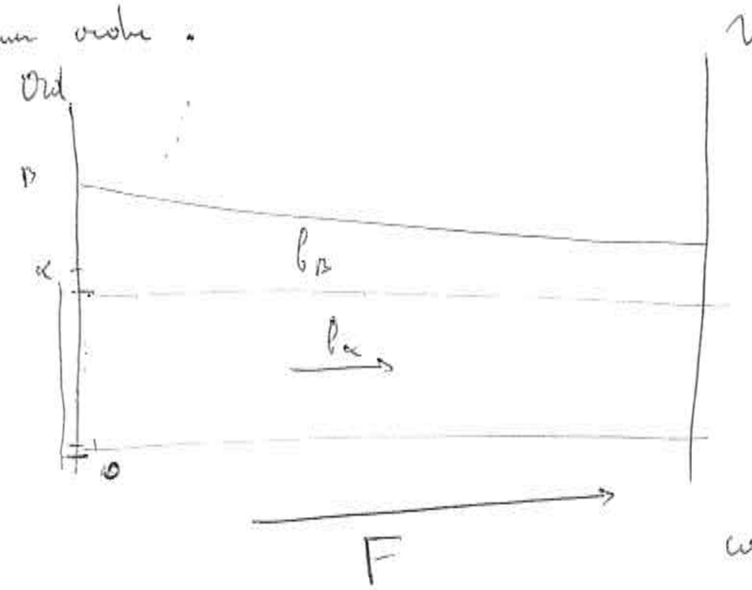
On peut donc prendre $f_\alpha := \bigcup X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$ qui est bien un élément de $\mathcal{U}$, et qui définit bien une fonction car par construction $f_{\beta|\beta'} = f_{\beta'}$ pour $\beta' < \beta < \alpha$.

et on a $\mathcal{U} \models \exists f\, \Psi[\alpha, f]$ car $\mathcal{U} \models \Psi[\alpha, f_\alpha]$.

Par le principe d'induction transfinie (†) est prouvée et donc le théorème aussi. ▨

NB : L'idée de la preuve est la suivante :

Pour calculer $F : \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathcal{U}$. On veut calculer $F(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Ord}$ on constate que si l'on considère $F_{|\alpha^+}$ (c'est alors une fonction $\alpha^+ \longrightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{U}$) et c'est de cette fonction $F_{|\alpha^+} = f_{\alpha^+}$ dont on prouve l'unique existence car $f_{\alpha^+} \in \mathcal{U}$ et on peut lui appliquer des formules du premier ordre.



f_α et f_β sont des éléments de $\mathcal{U}$ qui vérifient chacun la propriété de récurrence $\varphi(\alpha, f_\alpha)$

F est en fait défini comme leur union

$F = \text{“} \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} f_\alpha \text{”}$

(mais une telle union n'a pas de sens.).

Arithmétique ordinale

Les opérations + et . dans Ord sont définies par induction transfinie :

Addition : + est une classe fonctionnelle ($\subseteq Ord^2$) définie par :

(a) $\beta + 0 = \beta \quad \forall \beta$

(b) $\beta + \alpha^+ = (\beta + \alpha)^+$

(c) $\underset{\sup_{\delta<\lambda}(\beta+\delta)}{\beta + \lambda} = \sup_{\delta < \lambda} (\beta + \delta)$ $\quad \lambda$ ordinal limite.

Preuve : On fait une définition par induction transfinie avec β fixé.

$$F(\alpha) = G(F_{|\alpha}) \text{ et}$$

$$G(f) = \begin{cases} (\bigcup \operatorname{Im} f) & \text{si } f \text{ est une fonction de domaine un ordinal limite et d'image un ordinal} \\ \beta & \text{si } f = \emptyset \\ (\bigcup \operatorname{Im} f) \cup \{\bigcup \operatorname{Im} f\} & \text{si } f \text{ est } \dots \text{ ordinal maximum.} \end{cases}$$

On a donc $F(\alpha^+) = G(F_{|\alpha^+}) = G(\{(\gamma, \beta + \gamma) \mid \gamma \in \alpha^+\})$

$$= \left[\bigcup_{\gamma \in \alpha^+} \beta + \gamma\right]^+ = (\beta + \alpha)^+ .$$

Tout est bien exprimable en premier ordre

$$F(\lambda) = \bigcup_{\gamma < \lambda} (\beta + \gamma) .$$

∎

Proposition : (1) $\alpha + \beta$ est isomorphe à la somme ordonnée $\alpha \oplus \beta$.

(2) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \quad \forall \alpha$

(3) $\alpha + 1 = \alpha^+ \quad \forall \alpha$

(4) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma$.

(5) $\alpha < \beta$ ssi $\exists \gamma \neq 0 \quad \alpha + \gamma = \beta$

(6) $\beta < \beta'$ ssi $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$ (simplification à gauche)

(7) $1 + \alpha = \alpha + 1$ si α fini

$1 + \alpha = \alpha$ sinon.

Rem : (2) par induction transfinie : $0+\alpha=\alpha$.

$$0+0=0$$

$$0+\alpha^+ = (\underbrace{0+\alpha}_{\alpha})^+ = \alpha^+$$

$$0+\lambda = \sup_{\gamma<\lambda}(0+\gamma) = \sup_{\gamma<\lambda}\gamma = \lambda.$$

(3) $\alpha+1 = \alpha+0^+ = (\alpha+0)^+ = \alpha^+$.

(4) Induction sur γ. $\underbrace{(\alpha+\beta)+0}_{\alpha+\beta} = \alpha+\underbrace{(\beta+0)}_{\beta}$

$$(\alpha+\beta)+\gamma^+ = ((\alpha+\beta)+\gamma)^+ = (\alpha+(\beta+\gamma))^+ = \alpha+(\beta+\gamma)^+$$
$$= \alpha+(\beta+\gamma^+).$$

etc. $(\alpha+\beta)+\lambda = \left((\alpha+\beta)+\bigcup_{\delta<\lambda}\delta\right)$

par def !

$$= \left(\sup_{\delta<\lambda}((\alpha+\beta)+\delta)\right) \overset{HI}{=} \sup_{\delta<\lambda}(\alpha+(\beta+\delta))$$
$$= \alpha+\sup_{\delta<\lambda}(\beta+\delta)$$
$$= \lambda+(\beta+\lambda).$$

(5) avec le type d'ordre. $\alpha<\beta$ on pose $\gamma = ot(\beta\setminus\alpha)$

On a alors $\beta = ot(\alpha\oplus\gamma) = \alpha+\gamma$.

$\Leftarrow$: par induction sur γ que $\alpha+\gamma>\alpha$.

(6) : ok

(7) : On montre que $X=\{n\in\omega \mid 1+n=n+1\}$ est inductif, en effet

$1+0=0+1=1$ donc $0\in X$.

$\alpha\in X \Rightarrow 1+\alpha=\alpha+1$ et donc $(1+\alpha^+) = (1+\alpha)^+$

$$= \alpha+1$$
$$= \alpha+1^+$$
$$= (\alpha+1)+1 = \alpha^++1.$$

donc $\omega\subseteq X$..

Multiplication $\cdot : \mathrm{Ord}^2 \to \mathrm{Ord}$ classe fonctionnelle.

$$\boxed{\begin{aligned} &\bullet\ \beta\cdot 0 = 0 \\ &\bullet\ \beta\cdot\alpha^+ = \beta\cdot\alpha + \beta \\ &\bullet\ \beta\cdot\lambda = \sup_{\delta<\lambda}(\beta\cdot\delta) \end{aligned}}$$

Preuve : Induction transfinie. Étant donné $F|_{\alpha^+}$ on a que

$$F(\alpha^+) = \beta\cdot\alpha + \beta \quad \text{si } \alpha^+ \text{ est successeur}$$
$$= \sup_{(\delta,y)\in F|_{\alpha^+}} \underset{\beta\cdot\delta}{y} + \beta$$

Tout est bien exprimable en premier ordre.

$$\text{et } F(\lambda) = \sup_{\delta<\lambda}(\beta\cdot\delta) \quad \text{si } \lambda \text{ limite}$$
$$= \sup\left(\mathrm{Im}\, F|_\lambda\right)$$

Proposition : (1) $\alpha\cdot\beta$ est isomorphe à $\alpha \times_{\text{ordre}} \beta$.

(2) $\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0$

(3) $\alpha\cdot 1 = 1\cdot\alpha = \alpha$

(4) $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\,\gamma$

(5) $\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$

(6) $2\cdot\omega = \omega < \omega\cdot 2 = \omega+\omega$

(7) $\alpha \neq 0 \quad \beta<\beta' \iff \alpha\cdot\beta < \alpha\cdot\beta'$. (Simplification à gauche.)

Preuve. (1) induction utilisant ⊕ (2) induction sur α : $0\cdot\alpha = 0$ car $0\cdot 0 = 0$ et $0\cdot\alpha^+ = 0\cdot\alpha + 0 = 0+0 = 0$
$0\cdot\lambda = \sup_{\delta<\lambda}(\underset{0}{0\cdot\delta}) = \sup 0 = 0$

(3) induction sur α : $1\cdot\alpha = \alpha$. (4) induction sur γ.

(5) : induction sur γ. (6) $2\cdot\omega = \sup_{n<\omega}(2\cdot n) = \omega$

$\omega\cdot 2 = \omega\cdot(1+1) = \omega+\omega$.

(7) $\exists\, \gamma$ tq $\beta' = \beta+\gamma$ et donc $\alpha\cdot\beta' = \alpha\,\beta + \alpha\cdot\gamma > \alpha\cdot\beta$ car $\alpha,\gamma\neq 0$. ∎

Exponentiation

$\beta \neq 0$
- (a) $\beta^{0} = 1$
- (b) $\beta^{\alpha^+} = \beta^{\alpha} \cdot \beta$
- (c) $\beta^{\lambda} = \sup_{\delta < \lambda} \beta^{\delta}$

Preuve : Induction transfinie ⊠

Lemme : D.E : $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ $\alpha \neq \emptyset$ Alors il existe (μ, ρ) unique ordinaux tels que $\rho < \alpha$ et $\beta = \alpha \cdot \mu + \rho$. (ordre complet). ⊠

Preuve :

Proposition : (1) $\alpha^{1} = \alpha$ et $1^{\alpha} = 1$

(2) $\alpha^{\beta + \gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$

(3) $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$

(4) Si $\alpha > 1$ alors $\beta < \beta'$ ssi $\alpha^{\beta} < \alpha^{\beta'}$.
donc si $\alpha > 1$ $\alpha^{\beta'} = \alpha^{\beta} \Rightarrow \beta' = \beta$. ⊠

Preuve : induction

Proposition : Tout ordinal admet un développement unique en base α :

$$\beta = \alpha^{\beta_1} k_1 + \dots + \alpha^{\beta_n} k_n . \qquad \beta_1 > \dots > \beta_n \quad 0 < k_i < \alpha \quad \forall i .$$

et β_i et k_i sont uniques.

Pour $\alpha = \omega$ on l'appelle la forme normale de Cantor.

Preuve : On a besoin de : (*) $\alpha^{\gamma} \geq \gamma \quad \forall \gamma . \quad \alpha > 1.$
(en effet il suffit de voir que $\gamma \mapsto \alpha^{\gamma}$ est croissante et utiliser que toute fonction croissante dans les ordinaux est $f(x) \geq x$.)

(**) $\beta > 0$ alors il existe γ tq $\alpha^{\gamma} \leq \beta < \alpha^{\gamma^+}$

[en effet, Soit $\Delta = \{ \delta \mid \alpha^{\delta} \leq \beta \}$ On a que $\forall \delta \in \Delta$
$\alpha^{\delta} \leq \beta$ et on a $\alpha^{\delta} \geq \delta$ par (*) donc $\sup \Delta \leq \beta$.

Soit γ_0 le plus petit ordinal tel que $\alpha^{\gamma_0} > \beta$

Un exemple important : Les suites de Goodstein :

Soient $n, p \in \omega$, on definit l'écriture de n en base p itérée en écrivant n en base p puis les exposants en base p, etc... ex : $35 = 2^5 + 2 + 1$
$= 2^{2^2+1} + 2 + 1$

Pour n, p, α $n, p \in \omega$, $\alpha \in \omega^+ - \omega \cup \{\omega\}$

On definit $f_{p,\alpha}(n)$ = écriture en base p itérée de n en remplaçant p par α.

Par exemple $f_{2,3}(35) = 3^{3^3+1} + 3 + 1$ $\quad f_{2,\omega}(35) = \omega^{\omega^\omega+1} + \omega + 1$

(on écrit les coef à droite. ($f_{3,\omega}(3^3 + 3.2 + 1) = \omega^\omega + \omega.2 + 1$.

Lemme : • $\forall\ \omega \geq \gamma > q > p \geq 2$ on a $f_{q,\gamma} \circ f_{p,q} = f_{p,\gamma}$

• $f_{p,\omega}$ est strictement croissante $\forall p \geq 2$

La preuve est quasi-immédiate.

Definition (Suite de Goodstein) : Une suite de Goodstein de $a \in \omega$ est la suite definie par • $g_2(a) = a$

• $g_{n+1}(a) = \begin{cases} f_{n,n+1}(g_n(a)) - 1 & g_n(a) \neq 0 \\ 0 & \text{si } g_n(a) = 0. \end{cases}$

C'est une suite d'élément de ω.

Théorème (ZF$^-$) : Pour tout $a \in \omega$ la suite de goodstein est égale à zero à partir d'un certain rang.

Preuve : Par l'absurde. On considère

$$X_n = f_{n,\omega}(g_n(a))$$

On a que $f_{n,\omega}(k) = f_{n+1,\omega}(f_{n,n+1}(k))$.

$$X_{n+1} = f_{n+1,\omega}(g_{n+1}(a)) = f_{n+1,\omega}(f_{n,n+1}(g_n(a)) - 1)$$

car $f_{n,\omega}$ strictement croissante

$$< f_{n+1,\omega}(f_{n,n+1}(g_n(a)))$$

$= f_{n,\omega}(g_n(a)) = \alpha_n$. Ainsi $\alpha_{n+1} < \alpha_n \quad \forall n$
et donc la suite d'ordinaux $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de plus petit élément et donc on a une contradiction avec la bonne fondation de Ord. On a utilisé que $g_n(a) \neq 0 \quad \forall n$. donc

$\exists n_0$ tq $g_{n_0}(a) = 0$ $\square$

La raison pour laquelle ce théorème (G) est surprenant est que
On peut montrer que $PA \nvDash G$ et $PA \nvDash \neg G$ car
$\overline{\omega}$ est un modèle de PA dans lequel G est vrai.
On a donc que G est un énoncé indépendant de PA, or c'est un énoncé vrai dans ZF^- donc <u>ZF^- capture strictement plus sur $\overline{\omega}$ que PA</u>.
(en effet si $\mathcal{U} \models ZF^-$ et $\omega \in \mathcal{U}$, $(\omega, 0, S, +, \cdot, <) \models PA + G$.)

En prouvant $PA \nvDash G$ et $PA \nvDash \neg G$ nous donne le premier théorème d'incomplétude de Gödel.

Cardinaux

Dans $\mathcal{U} \models ZFC^-$ on peut définir des injections et des bijections entre les ensembles de $\mathcal{U}$ (ie les éléments de $\mathcal{U}$). Ainsi avec l'axiome du choix, on va pouvoir assigner à chaque ensemble un certain type d'ordinal avec lequel il sera en bijection.

Définition. On appelle cardinal tout ordinal qui n'est pas équipotent à un ordinal strictement plus petit.

ex: 17, ω cardinaux ; $\omega+1$ n'est pas un cardinal ($\simeq \omega$).

NB: AC $\Leftrightarrow$ principe de zermelo : Tout ensemble peut-être bien ordonné donc en bijection avec un ordinal. Cet ordinal, s'il n'est pas un cardinal, est équipotent à un cardinal plus petit qui lui même, s'il n'est pas un cardinal est équipotent à un ordinal plus petit ... au final, on tombera sur un cardinal auquel il sera équipotent.

Définition : $x \in \mathcal{U} \models ZFC^-$. Alors $\text{card}(x)$ dénote l'unique cardinal équipotent à x. (besoin de AC.)

Propriété : a) $x \mapsto \text{card}(x)$ est donné par une classe fonctionnelle. En effet la définition de cardinal est du premier ordre.

b) Les cardinaux forment une classe qui est propre ($\widetilde{\text{Card}}$) car par Cantor on peut toujours trouver un cardinal au dessus d'un ordinal, donc si Card était un ensemble, Ord le serait aussi.

On peut aussi dire que $\sup \text{Card}$ est un cardinal κ et donc $\text{card}(P(\kappa)) > \kappa$ par Cantor, ce qui est absurde car $\text{Card}(P(\kappa)) \in \text{Card}$.

- On remarque encore par Cantor, que si κ est un cardinal alors $\text{Card}(P(\kappa)) > \kappa$ on peut donc considérer : $\{\lambda \leq \text{Card}(P(\kappa)) \mid \lambda > \kappa, \lambda \in \text{Card}\}$

Cet ensemble est non vide (contient au moins $\text{Card}(P(\kappa))$ par Cantor) et donc admet un élément minimal (un cardinal est un ordinal).

On l'appelle le cardinal successeur de κ noté κ^+.

On peut aussi définir la hiérarchie $\aleph$:

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+} = (\aleph_\alpha)^+ \\ \aleph_\lambda = \sup_{\delta<\lambda} \aleph_\delta \quad \lambda \text{ limite.} \end{cases}$$

Le fait amusant est que tout cardinal est un $\aleph$.

<u>Théorème</u>: $\aleph$ est une classe fonctionnelle $\aleph : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Card}_{\text{infini}}^{\mathrm{Ord}}$ strictement croissante et "surjective" pour les cardinaux infinis

<u>Preuve</u>: Par induction transfinie sur β, on montre que $\alpha < \beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$

pour $\beta \geq 1$, si $\beta = 1$, $\alpha = 0$ et $\aleph_0 < \aleph_1 = \aleph_0^+$ par définition.

Si $\alpha<\beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$ alors si $\alpha < \beta+1$, $\aleph_\alpha < \aleph_\beta < \aleph_{\beta+} = \aleph_\beta^+$.

Si $\alpha < \lambda$, $\aleph_\alpha < \aleph_\delta$ pour tout δ tq $\alpha < \delta < \lambda$ et donc $\overset{\aleph_\lambda}{\overset{\shortparallel}{\sup_{\delta<\lambda}\aleph_\delta}} = \sup_{\alpha<\delta<\lambda} \aleph_\delta > \aleph_\alpha$.

On a donc par la propriété des fonctions croissantes :

$$f : \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$$
$$\alpha \longmapsto \aleph_\alpha$$

est croissante strictement donc vérifie $f(\kappa) \geq \kappa$ (on considère f sur son domaine) ainsi $\aleph_\kappa \geq \kappa$ ou encore $\underset{\aleph_\kappa^+}{\underset{\shortparallel}{\aleph_{\kappa+1}}} > \kappa$.

Donc $\aleph_{\kappa+1} \in \{ \alpha \leq \kappa+1 \mid \aleph_\alpha > \kappa \}$ qui est non vide, on considère donc un élément minimal $\alpha \leq \kappa+1$, $\aleph_\alpha > \kappa$.

- Mq α ne peut pas être limite :

  $\aleph$ est un lit continu par construction. si $\alpha = \lambda$ limite, alors
  On a $\aleph_\lambda > \kappa$ et $\aleph_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \aleph_\delta$ par continuité, donc
  on aurait $\sup_{\delta<\lambda} \aleph_\delta > \kappa$ donc il y aurait $\delta < \lambda$ tq $\aleph_\delta > \kappa$
  ce qui contredirait la minimalité de λ, donc α n'est pas limite.

Il existe donc β tq $\beta+1 = \alpha$. $\beta < \alpha$ donc par minimalité donc:

$$\aleph_\beta \leq \kappa < \aleph_{\beta+}$$

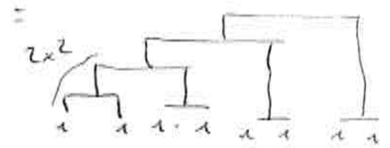
Or $\aleph_{\beta+} = (\aleph_\beta)^+$ et par définition $\aleph_\beta{}^+$ est le plus petit cardinal

<u>Définition</u> :

- $\kappa + \lambda := \mathrm{card}(\kappa \sqcup \lambda)$ cardinal de l'union disjointe
- $\kappa \cdot \lambda := \mathrm{card}(\kappa \times \lambda)$ cardinal du produit cartésien
- $\kappa^{\lambda} := \mathrm{card}(\{f : \lambda \to \kappa\})$ cardinal de l'ensemble des fct $\lambda \to \kappa$ (bien différent en premier ordre).

<u>N.B.</u> • Ces opérations sont données par des classes fonctionnelles.
• exponentiation cardinale $\neq$ exponentiation ordinale

$$\underset{\text{Cantor}}{2^{\aleph_0} > \aleph_0} \qquad \neq \qquad 2^{\omega} = 2 \times 2 \ldots \; 2 \ldots = \omega$$



<u>Proposition</u> : • Addition et multiplication cardinale sont commutatives et associatives.
• La multiplication cardinale distribue sur $+$.
• $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$ $\quad (\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda\mu}$ $\quad (\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \lambda^{\mu}$
• $\kappa \leq \kappa' \Rightarrow \kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda$ et $\kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda$ $\quad \forall \lambda$
• $\kappa \neq 0$, $\kappa \leq \kappa'$: $\kappa^{\lambda} \leq \kappa'^{\lambda}$ et $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda^{\kappa} \leq \lambda^{\kappa'}$

<u>Preuve</u> : se vérifie simplement par exemple comme l'addition et multiplication cardinale "coïncident" avec l'ordinal on vérifie le 1er point. Le deuxième se vérifie le deuxième cas de l'arithmétique cardinale etc.

Théorème de Hessenberg

$\boxed{\kappa \geq \aleph_0 \quad \text{alors} \quad \kappa \cdot \kappa = \kappa}$

<u>Preuve</u> : On montre par induction transfinie que
$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha .$$
Comme tout cardinal est de cette forme on aura le résultat.

<u>Pour $\alpha = 0$</u> : Il s'agit de montrer que $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ ce qui est

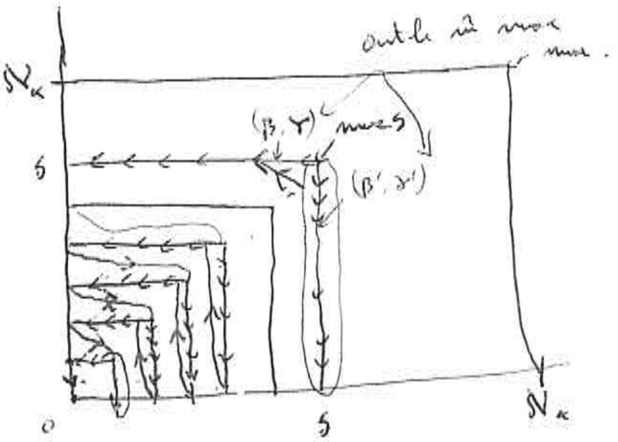
est une bijection.

$\underline{\alpha > 0}$: On suppose $\aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta \quad \forall \beta < \alpha$.

On munit $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ du bon ordre suivant :

$$(\beta, \gamma) < (\beta', \gamma') \text{ ssi } \begin{cases} \cdot \max(\beta,\gamma) < \max(\beta',\gamma') \text{ ou} \\ \cdot \max(\beta,\gamma) = \max(\beta',\gamma') \text{ et } \beta < \beta' \\ \cdot \max(\beta,\gamma) = \max(\beta',\gamma') \text{ et } \beta = \beta' \\ \quad \text{et } \gamma < \gamma'. \end{cases}$$

Cet ordre peut être vu comme l'ordre ~~induit par une "énumération de $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ "à la f2"~~ :

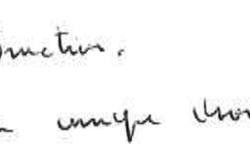


C'est un bon ordre. Il a la propriété suivante : tout sous produit ordinal $\delta \times \delta$ est un segment initial de $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ pour cet ordre.

Soit $\delta^{\text{ordinal}} < \aleph_\alpha$, $\delta \times \delta \subseteq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ et comme δ est un ordinal c'est un segment initial pour $<$ par construction.

On a $f : \varepsilon \longrightarrow (\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, <)$ un unique isomorphisme avec un ordinal ε. (puisque $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, <)$ est bien ordonné).

- On veut montrer que $\aleph_\alpha \geq \varepsilon$ en effet, dans ce cas on aura une injection de $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ dans $\aleph_\alpha$, et comme il y a une injection triviale de $\aleph_\alpha$ dans $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ on aura bien $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.
- On suppose par contradiction que $\varepsilon > \aleph_\alpha$, i.e. $\aleph_\alpha \in \varepsilon$, on a donc $f(\aleph_\alpha) = (\beta_0, \gamma_0) \in \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$. Soit $\delta_0 = \max(\beta_0, \gamma_0) + 1$

On a $\delta_0 \leq \aleph_\alpha$ (on a mis les coordonnées : )

De plus δ_0 est successeur donc ce ne peut pas être un cardinal, on a certes $\delta_0 < \aleph_\alpha$ et donc $\operatorname{card} \delta_0 < \aleph_\alpha$.

De plus car $\delta_0 = \max(\beta_0, \gamma_0) + 1$ donc $\aleph_\alpha \leq \delta_0 \times \delta_0$

On a donc $\aleph_\alpha \leq \operatorname{card}(\delta_0 \times \delta_0) \overset{HI}{=} \operatorname{card} \delta_0 < \aleph_\alpha$ ce qui est ↯

Le théorème de Hessenberg permet de conclure tout ce qu'il y a à savoir sur l'addition et la multiplication cardinale :

- Si x et y sont deux ensembles non vides dont un est infini

$$\mathrm{card}(x \cup y) = \mathrm{card}(x \times y) = \max(\mathrm{card}(x), \mathrm{card}(y))$$

- Autrement dit si κ, λ sont deux cardinaux avec $\kappa \geq \aleph_0$,

$$\kappa . \lambda = \kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$$

En effet, par Hessenberg : pour $\kappa = \max(\mathrm{card}(x), \mathrm{card}(y))$

$$\begin{aligned} \kappa \leq \mathrm{card}(x \cup y) &\leq \mathrm{card}\, x + \mathrm{card}\, y \\ &\leq \kappa + \kappa \\ &\leq 2 . \kappa \\ &\leq \kappa . \kappa = \kappa . \end{aligned}$$

On conclut de la même manière pour l'autre.

<u>Théorème</u> : Soit $(x_i)_I$ une famille d'ensembles avec au moins un x_i infini

Alors $\mathrm{card}(\bigcup_I x_i) \leq \sup(\{\mathrm{card}(x_i)\}_I \cup \mathrm{card}\, I)$

<u>Preuve</u> : Soit $X = \{(z_i, i) \mid i \in I, z_i \in x_i\} = \{(z, i) \mid i \in I, z \in x_i\} = \bigcup x_i \times I$

On a une surjection $X \longrightarrow \bigcup_{i \in I} x_i$ il suffit donc de montrer

que $\mathrm{card}(X) \leq \sup(\{\mathrm{card}\, x_i\} \cup \mathrm{card}\, I) = \kappa$.

Soit Y_i l'ensemble des applications injectives de $x_i \to \kappa$.

Clairement $Y_i \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{card}\, x_i \leq \sup(\mathrm{card}\, x_i) \leq \kappa$.

Par AC, $\prod_I Y_i$ est non vide, soit donc $f \in \prod_I Y_i$

$f = (f_i)_I$ avec f_i application injective $x_i \to \kappa$.

On a donc $g : X \to \kappa \times I$

$$(z, i) \mapsto (f_i(z), i)$$

g est injective et donc $\mathrm{card}\, X \leq \mathrm{card}(\kappa \times I)$

$\leq \mathrm{card}\, \kappa . \mathrm{card}(K) = \kappa . \kappa \stackrel{\text{Hessenberg}}{=} \kappa$. ∎

Théorème de König : Soient $(\kappa_i)_I$ et $(\lambda_i)_I$ une famille de cardinaux avec $\kappa_i < \lambda_i \quad \forall i \in I$. Alors

$$\sum_I \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

N.B : La hypothèse est importante : si $\kappa_i = \lambda_i$: $I = \aleph_0$, $\kappa_i = 2^{\aleph_0} = \lambda_i$

$$\sum \kappa_i = \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$
$$\prod \lambda_i = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

• si Σ : $\sum_{\aleph_0} 1 = \aleph_0 = \sum_{\aleph_0} 2$.

Preuve : On a clairement $\sum_I \kappa_i \le \prod_I \lambda_i$ soit donc f une injection :

$f : \sum_I \kappa_i \longrightarrow \prod_I \lambda_i$. On exhibe un élément qui n'est pas dans l'image de f. (en fait $f = (\tilde{f}_i)_{i \in I}$ $f_i = \tilde{f}_i|_{\kappa_i}$ $\tilde{f}_i : \sum \kappa_i \to \lambda_i$) f induit en fait f_i sur chaque $\kappa_i \to \lambda_i$ (par $\kappa_i \xrightarrow{inj} \sum \kappa_i \xrightarrow{f} \prod \lambda_i \xrightarrow{proj} \lambda_i$)

Comme $\kappa_i < \lambda_i$ f_i n'est pas surjective et donc $\emptyset \neq E_i := \lambda_i \setminus \mathrm{Im} f_i$.

Par (AC), $\prod_I E_i$ est non vide, soit donc $e \in \prod_I E_i \subseteq \prod \lambda_i$, alors par construction e n'a aucune de ses coordonnées dans l'image d'un f_i, il ne peut donc pas être dans l'image de f ∎

La hiérarchie de Von Neumann

Dans ZF^-. (Pas de fondation ni choix).

On définit la hiérarchie de Von Neumann (ou hiérarchie cumulative) par induction transfinie :

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$

Ceci se définit en logique du premier ordre on a donc bien affaire à une classe fonctionnelle $\alpha \mapsto V_\alpha$.

On a de plus la classe V définie par $\exists \alpha \; x \in V_\alpha$.

(plus formellement $\varphi(x) := \exists y \; \mathrm{Ord}(y) \wedge x \in V_y$)). On montre par induction transfinie que pour tout $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $\alpha \in V_{\alpha+1}$, en particulier $\mathrm{Ord} \subseteq V$ donc V est une <u>classe propre</u>.

- $\emptyset \in V_1 = \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset)$.
- si $\alpha \in V_{\alpha+1}$ $\quad \alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\}$
  donc $\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$ (on aura plus loin que V_α transitif)
  $\{\alpha\} \subseteq V_{\alpha+1}$ donc $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_{\alpha+1}$
  donc $\alpha \cup \{\alpha\} \in \mathcal{P}(V_{\alpha+1}) = V_{\alpha+2}$

Soit a un ensemble, on définit :

$$Rg(a) := \begin{cases} \text{le plus petit ordinal } \alpha \text{ tel que } a \in V_{\alpha+1} \text{ si il existe (i.e. si } a \in V) \; (\text{ou } a \subseteq V_\alpha) \\ \infty = \{\{\emptyset\}\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

appelé le rang de a. $x \mapsto Rg(x)$ est une classe fonctionnelle.

Propriétés de base des V_α :

(1) V_α est transitif

(2) $\beta \le \alpha \Rightarrow V_\beta \subseteq V_\alpha$

(3) $V_\delta = \bigcup_{\alpha \in \delta} V_\alpha$ pour tout δ limite.

(4) $V_\alpha = \{ x \in V \mid Rg(x) < \alpha \}$

(5) $y \in x \in V$ alors $Rg(y) < Rg(x)$

(6) Si $x \in V$ alors $Rg(x) = \sup_{y \in x} (Rg(y) + 1)$

(7) $x \in V$ et x transitif, alors

$$Rg[x] := \{ Rg(y) \mid y \in x \} \text{ est un ordinal.}$$

(8) $Rg(\alpha) = \alpha$ en particulier $Ord \cap V_\alpha = \alpha$.

(9) $x \in \mathcal{U}$, classe
(a) $x \in V$ (b) $x \subseteq V$

(10) (AC) Si $x \in V$ est transitif alors $x \in V_{card(x)^+}$

Preuve: (1) et (2) par récurrence sur α : $\emptyset = \alpha$ ok.

(1) • si V_α est transitif, soit $x \in y \in V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$
alors $x \in y \subseteq V_\alpha$ donc $x \in V_\alpha$, comme V_α est transitif, $x \subseteq V_\alpha$ donc $x \in P(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$

• Si λ limite $V_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} V_\delta$ si V_δ transitif $\forall \delta < \lambda$ on a
$x \in y \in V_\lambda \Rightarrow x \in y \in V_\delta$ pour un $\delta < \lambda$
donc $x \in V_\delta$ donc $x \in V_\lambda$.

(2) : $\beta \leq \alpha \Rightarrow V_\beta \subseteq V_\alpha$

$\alpha = \emptyset$ ok.

$\alpha + 1$: supp $V_\beta \subseteq V_\alpha \ \forall \beta \leq \alpha$.
soit donc $\gamma \leq \alpha + 1$ si $\gamma < \alpha + 1$, $\gamma \leq \alpha$ donc ok.
si $\gamma = \alpha + 1$, $V_\gamma = V_{\alpha+1}$ ok.

(3) par définition

(4) si $x \in V$ et $Rg(x) < \alpha$ alors $x \in V_{Rg(x)+1} \subseteq V_\alpha$ par (2).
Si $x \in V_\alpha$, on a $rg(x) < \alpha$ par définition du rang.

(5) $y \in x \in V$ si $\alpha = rg(x)$, on a $x \in V_{\alpha+1}$
et donc $y \in V_\alpha$, donc $rg(y) < \alpha$. par (4).

(6) $x \in V$ $\quad y \in x$ $\quad$ alors $rg(y) < rg(x)$

$$rg(y) + 1 \leq rg(x)$$

$$\alpha := \sup\,(rg(y)+1) \leq rg(x).$$

[On a de plus $\overset{\text{par (4)}}{\forall}\, y \in V_\alpha$ $\forall y \in x$ donc $x \subseteq V_\alpha$
et donc $x \in V_{\alpha+1}$
alors $rg(x) = \alpha$]

Soit $\beta = \sup\limits_{y \in x}(rg(y)+1)$ $\qquad \alpha = rg(x)$

on suppose que $\beta < \alpha$

on a $rg(y) < rg(y)+1 \leq \sup\limits_{y \in x}(rg(y)+1) = \beta$

donc $\forall y$ $rg(y) < \beta$ donc $y \in V_\beta$ $\forall y \in x$

alors $x \subseteq V_\beta$ donc $x \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$

et avec $\beta + 1 \leq \alpha$ donc $x \in V_\alpha$ ce qui contredit

que $rg(x) = \alpha$ (ie alors $x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$.

(7) On montre que $Rg[x] = \bigcup Rg(x)$.

$Rg(x)$ étant un ordinal, $\bigcup Rg(x)$ est aussi un ordinal.

$\subseteq$: Soit $Rg(y) \in Rg[x]$, $y \in x$ donc $Rg(y) \in Rg(x)$

et donc $Rg(y) \in \bigcup Rg(x)$.

$\supseteq$: Soit $\beta \in \bigcup Rg(x)$

par (6), $\bigcup Rg(x) = \sup\{Rg(y)+1,\ y \in x\}$ donc il existe $y \in x$

tel que $\beta < R(y) + 1$ ie $\beta \leq R(y)$ On prend y minimal,

Mq $R(y) \leq \beta$. Soit $z \in y$ on a

par transitivité de x $z \in x$ ~~et~~ par minimalité de y

$Rg(z) < \beta$ donc $z \in V_\beta$ donc $y \subseteq V_{\beta}$

et donc $y \in V_{\beta+1}$ donc $rg(y) \leq \beta$

(8) On montre par induction que $Rg(\alpha) = \alpha$.

- $Rg(0) = 0$

- On suppose que $Rg(\alpha) = \alpha$.

$$Rg(\alpha+1) = \sup\{Rg(\beta)+1 \mid \beta \in \alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\}\}$$
$$= \sup\{\{Rg(\beta)+1 \mid \beta \in \alpha\} \cup \{Rg(\alpha)+1\}\}$$
$$= \underbrace{\sup\{Rg(\beta)+1 \mid \beta \in \alpha\}}_{= Rg(\alpha) = \alpha} \cup \{\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{Rg(\alpha)}}+1\}$$
$$= \alpha + 1.$$

- On suppose que λ limite et $\forall \delta \in \lambda\ Rg(\delta) = \delta$.

$$Rg(\lambda) \overset{\text{déf}(6)}{=} \sup\{Rg(\delta)+1 \mid \delta \in \lambda\}$$
$$\overset{HI}{=} \sup\{\delta+1 \mid \delta \in \lambda\}$$
$$\overset{\lambda \lim}{=} \sup\{\delta \mid \delta \in \lambda\} = \lambda.$$

(9) $x \in U$. (a) $\Rightarrow$ (b) $x \in V$ $\exists \alpha$ tq $x \in V_\alpha \Rightarrow x \in V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$
donc $x \subseteq V_\alpha \subseteq V$.

(b) $\Rightarrow$ (a) $x \subseteq V$ $\exists \alpha$ tq $x \subseteq V_\alpha$ donc $x \in P(V_\alpha) = U$.
donc $x \in V$.

(10) x transitif $\Rightarrow$ $Rg[x]$ est un ordinal
De plus $Card(Rg[x]) = Card\{Rg(y) \mid y \in x\} \leq card(x)$.

on a bien $x \in \cancel{Card}\ V_{(card\, x)^+}$ ∎

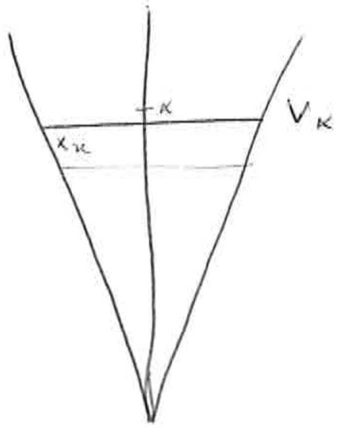
(AC) est utilisé pour parler de $Card(x)$ bien.

N.B : Les points importants sont :

- (2) et (3) nous disent que V_α est une hiérarchie croissante d'ensembles
- (4) et (5) nous montrent bien que le rang traduit le niveau dans lequel on se trouve, i.e. que x a un rang inférieur à $\{x\}$.

V.B. Interprétation de V_α :

- $x \in V_{Rg(x)+1} \setminus V_{Rg\,x}$
- $x \in V_\alpha \Rightarrow x \in V_\beta \ \forall \beta \geq \alpha$.
- $rg\,\alpha = \alpha$; $\alpha \in V_{\alpha+1}$



La formule la plus utile pour calculer le rang est la (6), on la rappelle $Rg(x) = \sup\{rg(y)+1 \mid y \in x\}$

Il est intéressant de calculer le rang d'un ensemble pour évaluer sa complexité hiérarchique :

Exemple :

- $rg\{x\} = \sup\{rg(y)+1 \mid y \in \{x\}\} = rg(x)+1$.
- $rg\,\mathcal{P}(x) = \sup\{rg(y)+1 \mid \underset{y \subseteq x}{y \in \mathcal{P}(x)}\} \overset{y=x}{=} rg(x)+1$
- $rg(\{x,y\}) = \max\{rg(x), rg(y)\} + 1$
- $rg((x,y)) = \max\{rg(x), rg(y)\} + 2$.
- $rg(x \cup y) = \max\{rg(x), rg(y)\}$.
- $rg(x \times y) \leq \max\{rg\,x, rg(y)\} + 2$. $(x \times y \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}(x \cup y))$.
- $rg(x^y) \leq \max\{rg\,x, rg\,y\} + 3$ $(x^y \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(x \cup y))$
- $rg(\bigcup x) \leq rg(x)$.

Exemples :

- $rg(\mathbb{N}) = rg(\omega) = \omega$
- $rg(\mathbb{Z}) = \omega + 1$; en effet : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\sim}$ $(a,b) \sim (c,d)$ ssi $a+d = b+c$.

On a donc $\overline{k} \in \mathbb{Z}$ où $\overline{k} = \{(n+k, n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

on a donc $rg(\overline{k}) = \sup\{rg(n+k, n) + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$

$= \sup\{(rg(n+k) + 2) + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$

$= \omega$.

un élément de $\mathbb{Z}$ est un ensemble de couples d'élément de $\mathbb{N}$

Donc $rg(\mathbb{Z}) = \sup\{rg(\overline{k}) + 1,\ \overline{k} \in \mathbb{Z}\}$

$= \sup\{\omega + 1\ \ \overline{k} \in \mathbb{Z}\} = \omega + 1$.

- $\mathbb{Q} = \dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*}{\sim}$ $\quad (a,b) \sim (c,d)$ ssi $a.d = b.c$

$\overline{p} = \{(p.k,\ k)\}$

$rg(\overline{p}) = \omega + 1 = rg(\overset{\in \mathbb{Z}}{p}.k)$

donc $rg\ \mathbb{Q} = \omega + 2$.

Un élément de $\mathbb{Q}$ est un ensemble de couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

- $\mathbb{R} = \{$coupure de dedekind$\}$ Une coupure de Dedekind peut etre vue comme une part de sous ensemble de $\mathbb{Q}$ mais aussi comme uniquement la partie gauche.

$\mathbb{R} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}),\ X \neq \emptyset \wedge X \neq \mathbb{Q} \wedge (\forall q \in X\ \forall p\ p < q \to p \in X) \wedge \forall p \in X\ \exists q \in X\ p < q\}$

un $\neq \emptyset$ et $\neq \mathbb{Q}$

Le rang de $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ est $\leq \omega + 2$ donc

$Rg(\mathbb{R}) \leq \omega + 3$ et donc $Rg(\mathbb{R}) = \omega + 3$

- $\mathbb{H} = \{(x, y, z, t),\ x, y, z, t \in \mathbb{R}$, avec la multiplication etc$\}$

On a $Rg(x, y) = Rg(\mathbb{R}) + 2$ et $Rg(x, y, z) = Rg(x, (y, z)) = Rg\ \mathbb{R} + 4$

(plus généralement $Rg(x_1 \ldots x_n) \leq \max(Rg(x_i)) + 2(n-1)$) (avec $(x) = x$.)

On voit donc que $rg(\mathbb{H}) = \sup(\underbrace{Rg(x, y, z, t)}_{Rg\ \mathbb{R} + 6} + 1\ \ x, y, z, t \in \mathbb{R})$

$= \omega + 10$

N.B : . Avec les quasi homomorphismes on trouve $rg\ \mathbb{R} \leq \omega + 5$

. Avec les suites de Cauchy on trouve $rg\ \mathbb{R} \leq \omega + 6$

On voit par les propriétés des V_α que dans V, on a un rang qui mesure les "étages" de la fondation des $x \in V$.
Le théorème suivant précise à quel point cette remarque est vraie, en particulier, il précise que si l'on accepte (FON), alors tout élément est dans un V_α, en particulier $U = V$.

Théorème : $U \models ZF^-$, LASSE

$$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ U \models (AF) \\ (2)\ U \models \forall x\, V_x \end{array}}$$

Preuve : (2) $\Rightarrow$ (1) : Soit $a \in U$, $a \in V_\alpha$ et $b \in a$ avec $rg(b)$ minimal on a $b \in V_\alpha$ par transitivité ; si on suppose $b \cap a \neq \phi$ alors tout élément est dans b et dans a ce qui contredirait la minimalité de b puisque alors son rang serait $< rg\, b$.

(1) $\Rightarrow$ (2) : On montre que tout $x \subseteq V$
Petit rappel sur la clôture transitive : $a_0 = x$, $a_{n+1} = a_n \cup \{a_n\}$
- $tcl(x) := \bigcup a_n$
- $x \subseteq tcl(x)$
- $tcl(x)$ est transitive

On utilise (9) beaucoup. On pose $y = tcl(x)$. Il suffit de montrer que $y \subseteq V$ et comme $x \subseteq y$ on aura $x \subseteq V$ donc $x \in V$ par (9)
Soit $Z = \{ z \in y \mid z \notin \overset{\cup V(\alpha)}{V} \}$ Si $Z \neq \phi$ notons $t \in Z$ minimal par (AF) alors y transitif donne $t \in y$ par transitivité. On a $t \cap z = \phi$

$t \cap z = \phi \Rightarrow t \subseteq y \setminus z$ donc $t \subseteq V$ et par (8) $t \in V$, ~~donc~~ ce qui est une contradiction car $t \in Z$

$\square$

Cofinalité

Définition : • Soit $(X, <)$ un ordre total. On dit que $Y \subseteq X$ est cofinal dans X si Y n'est pas majoré strictement dans X
("Y va aussi loin que X")
ie $\forall x \in X \ \exists y \in Y \ \ x \leq y$

• $f : \beta \to \alpha$ est cofinale si $\mathrm{Im} f$ est cofinale dans α.

• La cofinalité de α, notée $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit β tel que il existe $f : \beta \to \alpha$ cofinale.

Exemple : $\mathrm{Cof}(0) = 0$.

• $\mathrm{Cof}(\alpha + 1) = 1$: en effet $\alpha+1$ a un élément maximal donc si l'image d'une fonction contient cet élément max, elle est cofinale, enfin si 1 est envoyé sur cet élément maximal l'image est cofinale et 1 est minimal.

• $\mathrm{Cof}(\omega) = \omega$: une partie cofinale de ω doit contenir des ordinaux finis arbitrairement grand, elle est donc de cardinal $\geq \aleph_0$, ainsi comme $\mathrm{id} : \omega \to \omega$ est cofinal ~~...~~ sa cofinalité doit être de cardinal $\leq \aleph_0$ et donc c'est un ordinal de cardinal $\leq \aleph_0$, par minimalité, c'est ω. (pourrait être $\omega+\omega$ mais pas minimal).

Proposition : $\mathrm{Cof}(\aleph_\lambda) = \mathrm{cof}(\lambda)$. $\forall \lambda$ ordinal limite $(\neq \omega)$

Preuve : • $\mathrm{Cof}(\aleph_\lambda) \leq \mathrm{cof}(\lambda)$:
On suppose que $\beta = \mathrm{cof}(\lambda)$ et on a $f : \beta \to \lambda$ cofinale.
On a alors $\tilde{f} : \alpha \in \beta \mapsto \aleph_{f(\alpha)}$ est cofinale pour $\aleph_\lambda$. En effet,

$$\aleph_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \aleph_\delta = \bigcup_{\alpha < \beta} \aleph_{f(\alpha)} = \bigcup_{\alpha<\beta} \tilde{f}(\alpha)$$

← ce qui montre bien que $\tilde{f} : \beta \to \aleph_\lambda$ est cofinale.

chaque $\delta < \lambda$ est majoré par un $f(\alpha)$ pour $\alpha \in \beta$ puisque $f : \beta \to \lambda$ est cofinale.

Donc $\tilde{f}^{\ \beta \to \aleph_\lambda}$ est cofinale pour $\aleph_\lambda$ donc $\beta \geq \mathrm{Cof}(\aleph_\lambda)$.

- $\mathrm{Cof}(\lambda) \leq \mathrm{Cof}(\aleph_\lambda)$

Soit $f : \beta \to \aleph_\lambda$ cofinale.

On définit $g : \beta \to \lambda$
$$\gamma \mapsto \begin{cases} \varepsilon < \lambda \text{ tq } f(\gamma) \geq \aleph_\varepsilon \\ 0 \text{ si } f(\gamma) \text{ fini} \end{cases}$$

Alors g est cofinale, en effet soit $\gamma \in \lambda$, alors il existe $\alpha \in \beta$ tel que $f(\alpha) \geq \aleph_\gamma$; donc $\aleph_{g(\alpha)} \geq \aleph_\gamma$ et donc $g(\alpha) \geq \gamma$

donc g est cofinale. ☒

On en déduit par exemple que $\mathrm{Cof}(\aleph_\omega) = \omega$. On a de plus que $\forall \alpha$ $\boxed{\mathrm{cof}(\alpha) \leq \alpha}$, en effet $f^{\mathrm{Id}} : \alpha \to \alpha$ est toujours cofinale dans α.

Prop :
- $\mathrm{cof}(\alpha)$ est un cardinal. (α ordinal).
- $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal β tel qu'il existe une appli strictement croissante et cofinale $\beta \to \alpha$.
- $\mathrm{Cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

Preuve : Premier point : On a $\mathrm{cof}(\alpha)$ équipotent à $\mathrm{Card}(\mathrm{cof}(\alpha))$ donc si on compose l'application cofinale par la bijection elle reste cofinale. ☒

On a vu que $\mathrm{cof}(\kappa) \leq \kappa$. On a la définition suivante :

Def : Un cardinal κ infini est dit <u>régulier</u> si $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$ sinon il est dit <u>singulier</u> si $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$.

Rque : $\aleph_0$ est régulier, $\aleph_\omega$ est singulier.

Rque : Par la prop, $\mathrm{Cof}(\alpha)$ est un cardinal <u>régulier</u>.

Proposition : Tout cardinal infini successeur est <u>régulier</u>.

Preuve : On a $\kappa = \aleph_{\beta+1} = \aleph_\beta^+$. Soit $\lambda < \kappa$ et $f : \lambda \to \kappa$ cofinale (on la suppose par contradiction). Pour $\alpha \in \lambda$, $\mathrm{Card}(f(\alpha)) < \kappa$ et donc $\mathrm{Card}(f(\alpha)) \leq \aleph_\beta$.

On a donc $\mathrm{Card}\left(\underbrace{\{\sup(f(\kappa)) \mid \kappa \in \lambda\}}_{= \mathrm{Im} f}\right) \leq \sup\left(\{\mathrm{card}\, f(\kappa) \mid \kappa \in \lambda\}\right)$ [2]

$= \mathrm{Im} f$ ↑ donc f n'est pas cofinale dans κ.

$\leq \aleph_\beta < (\aleph_\beta)^+ = \kappa$ ▨

donc $\mathrm{card}\, \mathrm{Im} f < \kappa$ donc f non cofinale.

Prop : $\kappa \geq 2$ $\lambda \geq \aleph_0$ alors $\mathrm{cof}(\kappa^\lambda) > \lambda$.

Preuve : $f : \kappa \longrightarrow \kappa^\lambda$ et $\kappa \leq \lambda$. On montre que f n'est pas cofinale, ce qui montrera que pour $\kappa > \lambda$ il existe $f : \kappa \to \kappa^\lambda$ cofinale et donc la prop.

Pour $\beta \in \kappa$ on a $f(\beta) < \kappa^\lambda$. On a donc

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{\beta < \kappa} f(\beta)\right) \leq \mathrm{Card}\left(\dot{\bigcup_{\beta < \kappa}} f(\beta)\right)$$

$$\leq \sum_{\beta < \alpha} \mathrm{card}\, f(\beta)$$

$$\underset{\text{par théorème de König}}{<} \prod_{\beta \in \kappa} \kappa^\lambda$$

$$\leq (\kappa^\lambda)^\lambda \underset{\text{par thm de Hessenberg}}{=} \kappa^\lambda.$$

Ainsi $\mathrm{card}\left(\bigcup_{\beta \in \kappa} f(\beta)\right) < \kappa^\lambda$ donc $\mathrm{card}(\mathrm{Im} f) < \kappa^\lambda$ et donc $\mathrm{Im} f$ est majorée, ainsi f ne peut pas être cof. ▨

N.B : Cela fait deux fois que l'on utilise la technique suivante pour montrer qu'une application ne peut être cofinale : On montre que $\mathrm{card}\, \mathrm{Im} f <$ cardinal de l'espace d'arrivée, donc f ne peut être cofinale dans espace d'arrivée.

Corollaire : $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Preuve : Si ils étaient égaux ils auraient la même cofinalité.

Or $\mathrm{cof}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$ et $\mathrm{cof}(\aleph_\omega) = \omega = \aleph_0$ ▨

N.B : Pour tout λ limite on a $\boxed{2^{\aleph_\lambda} \neq \aleph_\lambda}$.

En effet :

$$\mathrm{cof}(\aleph_\lambda) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \lambda \text{ limite}}}{=} \mathrm{cof}(\lambda) \leq \lambda \leq \aleph_\lambda < \mathrm{cof}\left(2^{\aleph_\lambda}\right)$$

Théorèmes de Fodor et Solovay

Définition :

- Club : Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal régulier. Une partie $C \subseteq \kappa$ est dite club si elle est cofinale dans κ et fermée, i.e. $\forall A \subseteq C$, $\sup(A) \in C$ (card $A < \kappa$).
- Une partie $S \subseteq \kappa$ est dite stationnaire si elle intersecte tout club de κ.
- $\mathrm{Club}(\kappa) := \{ A \subseteq \kappa \mid \exists C \text{ club de } \kappa \text{ tq } A \supseteq C \}$ le filtre club.

Proposition :
- $\mathrm{Club}(\kappa)$ est un filtre κ-complet, i.e. toute intersection de famille de card $< \kappa$ d'élément de $\mathrm{club}(\kappa)$ est encore dans $\mathrm{Club}(\kappa)$.
- $(A_i)_{i \in \kappa}$ une famille d'élément dans $\mathrm{club}(\kappa)$.

Alors l'intersection diagonale :

$$\Delta_{i<\kappa} A_i := \{ \alpha \in \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{i<\alpha} A_i \}$$

est un élément de $\mathrm{club}(\kappa)$.

Preuve : premier point. On mq toute intersection de famille de club est un club, cela suffit. Soit $(C_i)_{i<\lambda}$ une famille de club dans κ, $C = \bigcap_{i<\lambda} C_i$. Clairement C est un fermé, mq C est cofinale dans κ. On construit une suite croissante $(\beta_n)_{n \in \omega}$ dans κ. Soit $\beta_0 \in \kappa$ qcq.

Ayant défini β_n, on pose pour chaque i :

$$\beta_{n+1,i} = \inf(\underbrace{C_i \setminus (\beta_n + 1)}_{\neq \emptyset \text{ car } C_i \text{ cofinale}})$$

On a pour chaque i, $\beta_{n+1,i} \in C_i$ et $\beta_{n+1,i} > \beta_n$

On pose ensuite $\beta_{n+1} = \sup(\beta_{n+1,i})$

Soit $\tilde\beta = \sup_n \beta_n \underset{\uparrow}{=} \sup_{i,n} \beta_{n,i}$ ($\in \kappa$ car κ régulier)

car $\beta_n < \beta_{n+1,i} \leq \beta_{n+1}$

Pour chaque i, $\tilde\beta$ apparaît comme une limite d'éléments de C_i, donc $\tilde\beta \in C_i \ \forall i$ (C_i fermé) donc $\underset{\text{borne}}{\tilde\beta} \in \bigcap C_i = C$. Comme tous les C_i sont cofinaux, si (β_n) était , on aurait les C_i bornés donc C est bien cofinal. (on fait $\tilde\beta \in \bigcap C_i$ et $\tilde\beta > \beta_0$ et β_0 arb. <u>arbitraire</u> du C est non borné, i.e. cofinal).

<u>Deuxième point</u> : On montre que si $(C_i)_{i\in\kappa}$ est une famille de clubs alors $C := \underset{i<\kappa}{\Delta} C_i$ est un club.

· Montrons que C est fermé : Soit $\emptyset \neq B \subseteq C$ $\overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{\sup B}} \in \kappa$ Mq $\alpha \in C$

pour $\beta \in B \subseteq C = \{\alpha \in \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{j<\alpha} C_j\}$ on a $\beta \in \bigcap_{\gamma<\beta} C_\gamma$

et si $\beta' \geq \beta$ on a $\beta \in \bigcap_{\gamma<\beta'} C_\gamma$ donc $B \subseteq \bigcap_{\gamma<\sup B} C_\gamma$ i.e. $B \subseteq \bigcap_{\gamma<\alpha} C_\gamma$

et donc comme $\bigcap_{\gamma<\alpha} C_\gamma$ est un fermé, $\sup B = \alpha \in \bigcap_{\gamma<\alpha} C_\gamma$ i.e. $\alpha \in C$.

· Mq C est cofinal : Pour $\beta < \kappa$ on définit par récurrence $\overset{\text{sur } \omega}{\text{une suite}}$

- $\xi_0 = \beta$
- $\xi_{i+1} = \min\{x \in \bigcap_{\gamma<\xi_i} C_\gamma \mid x > \xi_i\}$

Ceci est bien défini car $\bigcap_{\gamma<\xi_i} C_\gamma$ est cofinal dans κ donc on trouve bien un élément $> \xi_i$ (sinon ce serait cofinal).

Soit donc $\xi = \sup(\xi_i, i \in \omega)$ ($\in \kappa$ car κ régulier)

$\xi > \beta$. Pour tout $\gamma < \xi$ il existe i_0 tq $\xi_{i_0} > \gamma$ donc $\xi_i \in C_\gamma$ $\forall i \geq i_0$ et donc $\xi = \sup_{i \geq i_0}(\xi_i) \in C_\gamma$ comme C_γ est fermé.

On a donc que $\xi \in C$. On a donc exhibé $\xi \in C$ tq $\xi > \beta$ pour un β qcq de κ, donc C est cofinal dans κ

<u>N.B</u> : On a utilisé la bonne régularité de κ de la manière suivante : en prenant une suite indexée par ω (d'elt de κ $(\xi_i)_{i\in\omega}$) on a assuré que la limite

On aurait que $\omega \to \kappa$, $i \mapsto \beta_i$ serait cofinale et donc que la cofinalité de κ serait $\leq \omega$ ce qui est absurde car la cofinalité de κ est lui même et $\kappa > \omega$.

<u>Définition</u> : $S \subseteq \kappa$, $f : S \longrightarrow \kappa$ une fct. On dit que f est <u>régressive</u> si $f(\alpha) < \alpha$ $\forall \alpha \in S \setminus \{0\}$.

Ce n'est pas une fonction décroissante mais "en dessous de $y = x$" 

<u>Théorème de Fodor</u> : Soit $S_0 \subseteq \kappa$ <u>stationnaire</u>. Soit $f : S_0 \longrightarrow \kappa$ <u>régressive</u>. Alors il existe $S \subseteq S_0$ stationnaire tq $f_{|S}$ soit <u>constante</u>.

<u>Preuve</u> : On suppose par l'absurde que $\forall \gamma < \kappa$ $f^{-1}(\{\gamma\}) = \{x \in S_0 \mid f(x) = \gamma\}$ sont non stationnaires (i.e. il n'existe pas d'ensemble stationnaire sur lequel f soit constante). Alors pour chaque γ il existe un club C_γ tq $f^{-1}(\{\gamma\}) \cap C_\gamma = \emptyset$ (par définition). (on utilise (AC) sur l'ensemble des clubs). On a donc que pour $x \in C_\gamma$ $f(x) \neq \gamma$. On pose $C = \underset{\gamma \in \kappa}{\Delta} C_\gamma$, c'est un club par précédemment. Donc $S_0 \cap C$ est non vide puisque S_0 est stationnaire. Pour $\alpha \in S_0 \cap C$ on a que $f(\alpha) < \alpha$ puisque f régressive, or comme $\alpha \in C$, on a $\forall \gamma \leq \alpha$, $f(\alpha) \neq \gamma$ et donc $f(\alpha) > \alpha$ contradiction ⊠

<u>Exemples</u> (clubs)

- $\{\delta \in \kappa \mid \delta$ est limite$\}$ est un club. Clairement fermé, il n'est pas borné puisque κ est régulier.
- $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ <u>normale</u> (strictement croissante et continue)
  - $\mathrm{Im} f$ est un club
  - $\mathrm{Fix} f$ est un club

Théorème (Solovay pour $\aleph_1$)

> κ cardinal régulier. Alors il existe $(S_i)_{i<\aleph_1}$ famille dénombrable
> $S \subseteq \kappa$ stationnaire $S \subseteq \aleph_1$
> stationnaire de κ deux à deux disjoints tel que $\bigcup_{i<\aleph_1} S_i = S$

<u>NB</u>: Autrement dit tout ensemble stationnaire $\subseteq \aleph_1$ peut s'écrire comme réunion disjointe d'ensemble stationnaire en nb $\aleph_1$.

Preuve: (1) On peut supposer $S \subseteq Lim$ car $Lim \cap \aleph_1$ est club dans $\aleph_1$.

(2) $(A_i)_I$ une famille de partie non stationnaire de $\aleph_1$ alors $\bigcup A_i$ est non stationnaire ($\aleph_1$ complétude de Club $\aleph_1$).

(3) $\alpha \in S$. On choisit une suite $(\xi^\alpha_i)^{\subseteq \aleph_1}_{i<\omega}$ strictement croissante avec $\sup_{i<\omega}(\xi^\alpha_i) = \alpha$.

ξ^α_i | $\aleph_1$ | α

et on pose $f_i : S \to \aleph_1$, $\alpha \mapsto \xi^\alpha_i$ régressive par construction.

(4) $\beta < \aleph_1$ il existe $i < \omega$ tq $S_{i,\beta} = \{\alpha \in S \mid f_i(\alpha) > \beta\}$ est stationnaire

En effet $S \setminus (\beta+1)$ est stationnaire et $S \setminus (\beta+1) = \bigcup_{i\in\omega} S_{i,\beta}$ il faut donc qu'un des $S_{i,\beta}$ est stationnaire. par (2)

(5) Il existe $i_0 \in \omega$ tq $S_{i_0,\beta}$ est stationnaire $\forall \beta \in \aleph_1$

En effet, on a $\bigcup_{i\in\omega}\{\beta < \aleph_1 \mid S_{i_0,\beta} \text{ stationnaire}\}$ est de card $\aleph_1$ donc il existe i_0 tq $\{\beta < \aleph_1 \mid S_{i_0,\beta} \text{ stationnaire}\}$ est de card $\aleph_1$, et donc comme $\beta < \beta' \Rightarrow S_{i_0,\beta'} \subseteq S_{i_0,\beta}$; on sait que cet ensemble est $\aleph_1$

(6) $S' \subseteq S$ stationnaire. Alors il existe $\beta \in \aleph_1$ tq $\{\alpha \in S' \text{ tq } f_{i_0}(\alpha) = \beta\}$ est stationnaire, c'est le lemme de Fodor

(7). Par induction sur $\alpha \in \aleph_1$, on construit une suite strictement croissante $(\beta_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$ de $\aleph_1$ tq

$f_{i_0}^{-1}(\beta_\alpha) =: S_\alpha$ est stationnaire

On conclure le théorème avec $S = \bigcup f_{i_0}^{-1}(\beta_\alpha)$ bien disjoint car c'est une f.f.

On construit la suite de (7) de la façon suivante: $\boxed{3}$

Si $(\beta_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ est construite, on pose $\delta_\alpha := \sup_{\gamma<\alpha} \beta_\gamma \overset{\aleph_1 \text{ régulier}}{<} \aleph_1$

· par (5) S_{i_0, δ_α} est stationnaire.

· par (6) appliqué à S_{i_0, δ_α} il existe β_α tq $S^{\beta}_{i_0, \delta_\alpha} \cap f_{i_0}^{-1}(\beta_\alpha)$ soit stationnaire. ∎

Sur la relativisation d'une formule

On se place dans un "modèle" $\mathcal{U}$ de ZF^- (pour plus de généralité)
On disposera de classes comme Ord, V, que l'on identifiera avec les formules, i.e. $\mathcal{U} \models \mathrm{Ord}(x)$ ssi $x \in \mathrm{Ord}$. On va définir la relativisation d'une formule à une autre formule (ou une classe) ce qui va nous permettre de restreindre l'interprétation d'une formule à une autre, ou à une classe. On se donne $F(x)$ une $\mathcal{L}_{\in}$-formule et φ une autre formule. On définira la <u>relativisation de φ à F</u> de la façon suivante :

- $\varphi^F := \varphi$ $\quad$ φ atomique
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^F := \varphi_1^F \wedge \varphi_2^F$
- $(\neg \varphi)^F := \neg \varphi^F$
- $(\exists z\, \varphi)^F := \exists z\ F(z) \wedge \varphi^F(z)$.

On a donc défini une formule φ^F associée à φ telle que tous les quantificateurs ne portent que sur des éléments vérifiant F.
Si X est une classe définie par F et par G, i.e. $X = F[\mathcal{U}] = G[\mathcal{U}]$ alors $\mathcal{U} \models \forall x\ \varphi^F \leftrightarrow \varphi^G$, cela se prouve par induction sur φ.
Donc la relativisation à une classe ne dépend pas de la ~~relat~~ formule choisie, on peut donc poser pour X une classe, φ^X la <u>relativisation de φ à la classe X</u>. C'est donc une formule dont les quantificateurs parcourent X. On a le résultat attendu suivant :

<u>Lemme</u> : $\bar{a} \in X$; $\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}_{\in}$, alors

$$\mathcal{U} \models \varphi^X[\bar{a}] \quad \text{ssi} \quad \langle X, \in_{|X \times X} \rangle \models \varphi[\bar{a}]$$

La preuve est par induction sur la complexité et cela marche par construction.

On définit la notion d'absoluité :

- Soit X une classe définie par $F(x)$. Une formule $\varphi(x_1 \dots x_n)$ est dite <u>absolue pour X</u> si

$$\mathcal{U} \models \forall x_1 \dots x_n \left(\bigwedge_i F(x_i) \to \left(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^F(\bar{x}) \right) \right)$$

en encore $\forall \bar{a} \in X \quad \mathcal{U} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{U} \models \varphi^X[\bar{a}] \Leftrightarrow (X, \in_X) \models \varphi[\bar{a}]$

Une formule est donc absolue pour une classe si la formule restreint ses quantifications à X naturellement. En particulier, si φ abs pour $X \subseteq \mathcal{U}$ et $\mathcal{U} \models \varphi$ alors $\langle X, \in_{|X \times X} \rangle \models \varphi$.

<u>Exemple</u> : (Δ_0 absolue pour les classes transitives)

Une formule Δ_0 est une formule n'ayant que des quantifications bornée, comme par exemple :

$$\varphi(x,y) = \left[(\forall z \in x)(z = y \lor z \in y) \land ((\forall z \in y)\ z \in x) \land y \in x \right]$$

cette formule est Δ_0 et exprime $x = y \cup \{y\}$. On peut de la même manière exprimer $x \subseteq y$, $x = \emptyset$, x transitif etc..

Soit X une classe transitive $\neq \emptyset$ alors toute formule Δ_0 est absolue pour X.

Cela se prouve par induction sur la complexité d'une formule. On montre que l'ensemble des formules absolues pour X contient les formules atomiques, est stable par opération booléenne et par quantification bornée.

- $(x \in y)^X = x \in y \qquad (x = y)^X = x = y$

ces formules sont donc bien absolues pour X.

- $\varphi = \psi_1 \land \psi_2$ on suppose que pour $x_1 \dots x_n \in X$

$$\mathcal{U} \models \psi_1^F(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi_1(\bar{x})$$
$$\mathcal{U} \models \psi_2^F(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi_2(\bar{x})$$

alors $(\psi_1 \land \psi_2)^F = \psi_1^F \land \psi_2^F \dots \mathcal{U} \models \varphi^F \Leftrightarrow \varphi \quad \forall x_i \in X\ F(x_i)$

Le cas du quantificateur borné est plus difficile.

On suppose que $\psi(\bar{x}, y)$ est absolu pour X, $\bar{x} = x_1 \dots x_n$

et soit $\varphi(x_1,\dots,x_n) = (\exists y \in x_1)\psi$.

On suppose que X est défini par F ; soient $a_1 \dots a_n \in X$

$\mathcal{U} \models \varphi^X[a_1\dots a_n]$ ssi $\mathcal{U} \models ((\exists y\in x_1)\psi(x_1\dots x_n, y))^X[a_1\dots a_n]$

ssi $\mathcal{U}\models (\exists y\, (y\in x_1)\wedge \psi(x_1\dots x_n,y)))^X[a_1\dots a_n]$

ssi $\mathcal{U}\models \exists y\, (y\in x_1)\wedge F(y)\wedge \psi^X(x_1\dots x_n,y)\ [a_1\dots a_n]$

ssi $\mathcal{U}\models \exists y\, (y\in a_1)\wedge F(y) \wedge \psi^X[a_1\dots a_n]$

Or X transitif, donc comme $a_1\in X$, on a donc $\exists b\in a_1 \subseteq X$

tq $\mathcal{U}\models\psi^X[a_1\dots a_n, b]$, car $b\in X$ et ψ est absolu
donc $F(b)$ est toujours vrai

ssi $\mathcal{U}\models\psi[a_1\dots a_n,b]$ et donc ssi $\mathcal{U}\models(\exists y\in x_1)\psi[a_1\dots a_n]$. ∎

<u>Exemple simple de non absoluité</u> : On considère la classe

$X = \{\emptyset, \underset{a}{\{\{\emptyset\}\}}\}$, alors $x\subseteq y$ n'est pas absolue pour X.
$=\{0,a\}$

en effet $\mathcal{U}\models (a\subseteq 0)^X$ puisque $\forall x\ \ x\in a\wedge x\in X\to x\in 0$

cette implication est vraie puisqu'il n'y a pas d'élément dans a qui soit dans X., or $\mathcal{U}\models a\not\subseteq 0$ clairement.

Les quantificateurs dépendent entièrement du contexte dans lequel ils sont mis, ie le domaine de la structure. Lorsque l'on considère φ^X il s'agit de vérifier si la structure de <u>domaine X</u> vérifie la formule. Par exemple dans le X de l'exemple précédent, il est vrai que $a\subseteq 0$ ce qui est faux dans $\mathcal{U}$.

Les formules sans quantificateurs sont par exemple absolues pour toute classe ; il s'agit en fait de vérifier si une <u>formule "passe à la sous structure"</u> de domaine la classe en φ? ; voilà ce qu'est une formule absolue.

Définition : Une classe fonctionnelle $G \subseteq \mathcal{U}\times\mathcal{U}$ est dite **absolue pour la classe X** si :

- $G(x,y)$ est absolue pour X
- $\forall x \in X$ l'unique $y \in \mathcal{U}$ avec $\mathcal{U} \models G(x,y)$ est $\in X$.

Autrement dit, $G : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $G_{|X} : X \to X$.

Exemple : $P : \begin{array}{c}\mathcal{U} \to \mathcal{U} \\ x \mapsto P(x)\end{array}$ est absolue pour V. En effet, comme V est transitive et $(y = P(x))^V$ se traduit par

$(y = P(x))^V = \forall t\, (t \in V) \wedge (t \in y \Longleftrightarrow (t \subseteq x)^V)$

or $(t \subseteq x)^V = t \subseteq x$ car c'est une formule Δ_0 $((\forall u \in t)(u \in x))$

et V transitif. De plus $t \in y \to t \in V$ car V est transitif et on considère

on a donc $(y = P(x))^V$ équivalent à $\forall t\, (t \in y \Longleftrightarrow t \subseteq x)$ donc

la formule $y = P(x)$ est absolue pour V. (c'est cette formule qui définit P)

Il reste à montrer que V est stable par les parties, soit $a \in V$

alors $a \in V_\alpha$ et donc $P(a) \in V_{\alpha+1}$ donc $P(a) \in V$

On a donc bien montré que $x \mapsto P(x)$ est une classe fonctionnelle absolue pour V (elle est aussi absolue pour V_δ avec δ limite).

N.B. Si G est une classe fonctionnelle absolue pour X, alors

$$X \models \forall x\, \exists!\, y\ G(x,y).$$

N.B. Dans l'exemple précédent la première partie consiste à montrer que $P(x)$ a le même sens dans $\mathcal{U}$ et dans V et la deuxième consiste à montrer si $x \in V$, $P(x) \in V$.

Absoluité et consistance relative dans ZF

Se référer à "Sur la relativisation d'une formule" (p51).

• Quelques résultats d'absoluité de base.

(1) Si X est transitif et $\neq \emptyset$ alors $X \models (EXT)$

Autrement dit il s'agit de montrer que (EXT) est absolue pour X.
En effet, comme $X \models (EXT)$ ssi $\mathcal{U} \models (EXT)^X$ et $\mathcal{U} \models (EXT)$ (par déf) il suffit de montrer qu'en fait pour $x \in X, y \in X$ $\mathcal{U} \models (EXT)^X[x,y]$ ssi $\mathcal{U} \models EXT[x,y]$:

$\mathcal{U} \models (EXT)^X[x,y]$ ssi $\mathcal{U} \models \forall t\, (t \in X)\, [(t\in x) \leftrightarrow (t \in y) \longrightarrow x = y]$

comme X est transitif, ~~X~~ $t \in x \to t \in X$ donc c'est équivalent à

$$\mathcal{U} \models \forall t\, [(t\in x)\leftrightarrow(t\in y) \longrightarrow x=y] = (EXT)[x,y].$$

(2) $\forall \alpha > 0$ $V_\alpha \models (U)$ et $V \models (U)$

On sait que si G est une classe fonctionnelle absolue pour X alors $X \models \forall x \exists! y\, G(x,y)$
Il s'agit donc de montrer que $x \mapsto \cup x$ est une classe fonctionnelle absolue pour V_α. En effet $y = \cup x$ est Δ_0 (c'est $(\forall z \in y)(\exists t \in x)$ $(z\in t) \wedge (\forall z \in x)(\forall t \in z)(t \in y)$) ; et comme V_α est transitif on a bien que $y = \cup x$ est absolue pour V_α. Enfin si $x \in V_\alpha$ $rg(\cup x) \leq rg(x)$ donc $\cup x \in V_\alpha$ et donc $x \mapsto \cup x$ est bien une classe fonctionnelle absolue pour V_α, on a donc bien $V_\alpha \models \forall x \exists ! y\ y = \cup x$

donc $V_\alpha \models (U)$. Clairement cette même preuve marche pour V.

(3) $V \models (PAIRE)$ et $V_\delta \models (PAIRE)$ $\forall \delta$ limite.

Même méthode que précédemment : $z = \{x,y\}$ est Δ_0, en effet, c'est $(\forall t \in z)(t = x \vee t = y) \wedge (x \in z) \wedge (y \in z)$. De plus, si x et y sont dans V_α, alors $\{x,y\} \in V_{\alpha+1}$ donc clairement pour V_δ on aura si $x,y \in V_\delta$, $x,y \in V_\alpha$ $\alpha < \delta$ et donc $\alpha+1 < \delta$ donc $\{x,y\} \in V_\delta$.
On a donc que $z = \{x,y\}$ définit une classe $G : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ qui est absolue pour V_δ δ limite et pour V clairement, donc on a (3).

(4) $X \neq \emptyset$ classe transitive telle que $\mathcal{U} \models (\forall x \in X)(\exists y \in X)\ P(x) \cap X = y$

Alors $X \models$ (PARTIES). En particulier $V \models$ (PARTIES) $V_\delta \models$ (PARTIES) δ limite.

$X \models$ (PARTIES) ssi $\mathcal{U} \models (\text{PARTIES})^X$

ssi $\mathcal{U} \models (\forall x \in X)(\exists y \in X)(\forall z \in X)\ (z \subseteq x \leftrightarrow z \in y)$

ssi $\mathcal{U} \models (\forall x \in X)(\exists y \in X)\ [\underbrace{P(x)}_{\text{au sens de } \mathcal{U}} \cap X = y]$

ce qui est vrai par hypothèse ☐

On constate que l'on a utilisé deux méthodes pour montrer qu'une formule est absolue pour une certaine classe; ou plutôt pour montrer qu'une classe vérifiait un certain axiome.

La première méthode utilisée en (1) et consiste à montrer "à la main" que $\mathcal{M} \models (\text{axiome})^X$ en général en montrant que $(\text{axiome})^X \leftrightarrow (\text{axiome})$ (en utilisant par exemple la transitivité). (1,4)

La deuxième méthode utilisée en (2) (3) et (4) permet de montrer qu'un axiome est vérifié en utilisant une classe fonctionnelle définie par une sous formule de l'axiome, et en utilisant la propriété des classes fonctionnelles qui, elle, est absolue. Cette méthode convient pour (2), (3) et (4) car elles définissent des classes fonctionnelles $\left(\begin{array}{l} x \mapsto \cup x \\ x,y \mapsto \{x,y\} \\ x \mapsto P(x) \end{array}\right)$

• Ord (x) est absolue pour V et V_δ, δ limite

Ord (x) est la conjonction de 3 formules qui sont absolues pour V et V_δ :

(1) • "x est transitif" : Δ_0 et V, V_δ transitif donc absolue

(2) • "$\in_x$ total" : Δ_0 ———

(3) • L'ordre est bien fondé : On utilise (4), on a $P(x)$

l'ordre bien fondé se traduit par

|| $(\forall z \in P(x))\ (z \neq \emptyset \to (\exists u \in z)(\forall w \in z)(w \notin u))$ $\quad \Delta_0$

Donc la conjonction de ces 3 formules est absolue pour V et V_δ, δ limite.

↳ Rappel : On rappelle que (X,R) est bien fondé si toute partie de X a un élément minimal, donc $\forall Z \subseteq X \quad Z \neq \emptyset \Rightarrow \exists u \in Z$ où $u \cap X = \emptyset$

• Card (x) est absolu pour V et V_κ κ limite

On peut définir un cardinal par

$$Ord(x) \wedge (\forall y \in x) \neg (\exists f \in P(x \times y)\ f : x \overset{bij}{\cong} y)$$

"un cardinal est un ordinal qui n'est équipotent à aucun de ses prédécesseurs"

Il reste à montrer que les formules "$P(x \times y)$" et "f est une bijection entre x et y" sont absolues. Or fait $x \times y$ est Δ_0 et la formule à 3 variables $f : x \cong y$ aussi.

• Cardinaux relatifs :

Définition : Dans ZF^-. Un cardinal κ $(\neq \omega)$

- κ est fortement limite si $\mu < \kappa \Rightarrow 2^\mu < \kappa$.
- κ est dit inaccessible s'il est fortement limite, $> \aleph_0$ et régulier (ie égal à sa cofinalité).

Proposition : Soit $M \models ZF^-$. κ cardinal inaccessible

(1) $V \models (REM) + (AF)$

(2) $V_\omega \models (REM) + (AF)$

(3) $V_\kappa \models (REM) + (AF)$. (AC)

Preuve : On commence par montrer que ces 3 classes vérifient (AF).
C'est vrai car ces 3 classes sont munies de rg, donc si $a \neq \emptyset$ et $a \in X$ (où $X = V, V_\omega$ ou V_κ) alors il existe $y \in a$ de rang minimal on aura alors $y \cap a = \emptyset$ car si $z \in y \cap a$, alors $rg(z) < rg(y)$ contradiction.

Pour (REM) l'idée est de se ramener au remplacement sur U.
Soit F une formule définissant $X = V, V_\omega$ ou V_κ.
et $G(x, y)$ une Σ-formule définissant une classe fonctionnelle dans $(X, \in_{|X \times X})$.

On veut montrer que l'image dans X de G (de $a \in X$) est un élément de X.

On définit la classe fonctionnelle dans $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$:

$$H(x,y) = \left(F(x) \wedge F(y) \wedge G^F(x,y) \right)$$

(on a besoin de G^F car on ne sait pas ce que G dit dans $\mathcal{U}$.)

H est une classe fonctionnelle sur $\mathcal{U}$ et par remplacement dans $\mathcal{U}$ pour $a \in X$, on a que $b := H[a] = \{ H(c) \mid c \in a \}$ ($\subseteq X$) est un élément de $\mathcal{U}$. On traite 3 cas suivant X :

- $X = V$: on a clairement $b \subseteq V$ donc $b \in V$ puisque $b \in \mathcal{U}$. et un ensemble par remplacement dans $\mathcal{U}$.
- $X = V_\omega$: b est fini (car $a \in V_\omega$ est fini) et $b \subseteq V_\omega$ donc $b \in V_n$ pour un certain n, ou $b \in V_\omega$.
- $X = V_\kappa$:

On montre que $\alpha < \kappa \Rightarrow \mathrm{Card}(V_\alpha) < \kappa$.

Par induction :
- $\alpha = 0$: $\mathrm{Card}\, V_0 = 0 < \kappa$ car $\kappa > \aleph_0$
- $\beta = \alpha + 1$: $\mathrm{Card}\, V_{\alpha+1} = 2^{\mathrm{Card}(V_\alpha)} < \kappa$ car κ fortement limite et HI $\mathrm{Card}\, V_\alpha < \kappa$.
- λ limite : si $\delta < \lambda$ $\mathrm{Card}(V_\delta) < \kappa$ et $\mathrm{Card}(\bigcup V_\delta) = \mathrm{Card}(V_\lambda) \geq \kappa$ alors $\begin{array}{l} \lambda \to \kappa \\ \delta \mapsto \mathrm{Card}(V_\delta) \end{array}$ serait cofinale ce qui est absurde car $\lambda < \kappa$ et κ régulier (i.e. égal à sa cofinalité.)

car $V_\kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} V_\alpha$ puisque (cardinal limite $\Rightarrow$ limite)

On a $a \in V_\kappa$, i.e. $a \in V_\alpha$ pour un $\alpha < \kappa$ donc $a \subseteq V_\alpha$ et donc $\mathrm{card}(a) < \kappa$ par ce que l'on a dit. Maintenant, comme $b = H[a]$, $\mathrm{card}(b) \leq \mathrm{card}(a) < \kappa$.

Montrons que $\mathrm{Rg}(b)$ reste $< \kappa$: donc on aura $b \subseteq V_\beta$, $\beta < \kappa$ donc $b \in V_{\beta+1}$ et donc $b \in V_\kappa$ car $V_{\beta+1} \subseteq V_\kappa$.

Si $\mathrm{rg}(b)$ était $\geq \kappa$ alors $\mathrm{Rg} : b \to \kappa$ serait cofinale ce qui est absurde. On conclut donc le résultat.

N.B. : $V_\kappa \models (AF)$ $\forall \kappa \in \mathrm{Ord}$. NB : κ fortement limite $\Rightarrow$ κ limite

Proposition :

(1) $V \models (INF)$

(2) $V_\kappa \models (INF)$ κ inaccessible

(3) $V_\omega \models \neg(INF)$

Preuve : (1) et (2) : évident car $\omega \in V$ et $\omega \in V_\kappa$ $(\kappa > \omega)$
Le rang de tout ensemble infini est infini donc on ne peut pas avoir d'élément infini dans V_ω puisque tous ses éléments sont de rang fini. ∎

Proposition : $\mathcal{U} \models ZFC^-$

Alors $V \models (AC)$ et $V_\kappa \models (AC)$ $\forall \kappa$ inaccessible (et même régulier).

Preuve : Soit $a := (x_i)_{i \in I}$ un élément de V_κ avec $x_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$. On a $I \in V_\kappa$ car $I \in P(V_\alpha)$. $\subset \mathcal{U}$
(en effet $a = (x_i)_{i\in I}$ est en fait une fct : $a : I \to \{x_i \mid i \in I\}$ et donc $a \subseteq I \times \{x_i \mid i \in I\}$ donc $I \subseteq V_\alpha$, $I \in P(V_\alpha)$).
Par (AC) (dans $\mathcal{U}$) on a $\prod_{i \in I} x_i \neq \emptyset$, soit $g \in \prod_{i\in I} x_i$
car img $g : I \to \kappa$ serait cofinal or $I < \kappa$.
On a que $rg(\prod_{i \in I} x_i) < \kappa$ donc $rg(g) < \kappa$ ie $g \in V_\kappa$ donc $V_\kappa \models (AC)$. (on utilise juste la régularité en fait) [si $rg \prod_I x_i \geq \kappa$, $I \to \kappa$, $i \mapsto rg(g(i))$ cofinale]
La preuve pour $V \models (AC)$ est la même en disant que $\prod x_i \in V$ donc $g \in V$. ∎

On a à présent les outils nécessaires pour des vrais résultats de consistance relative.
En effet on s'est placé dans ZF^- et on a montré que
$V \models (EXT) + (PAIRE) + (U) + (PARTIES) + (REM) + (INF)$
Donc $V \models ZF^-$, de plus on a montré que $V \models (AF)$
ce qui veut dire que même si $\mathcal{U}$ ne vérifie pas (AF) V le fait.
On a montré le théorème suivant :

Théorème : (Consistance relative de l'axiome de fondation)

$\boxed{\begin{array}{l} \cdot \text{ Si } \mathcal{U} \models ZF^- \text{ alors } V \models ZF \quad (\text{et } V_\kappa \models ZF) \\ \cdot \text{ Si } \mathcal{U} \models ZFC^- \text{ alors } V \models ZFC \quad (\text{et } V_\kappa \models ZFC) \end{array}}$ κ inaccessible

N.B : Ce théorème nous dit que si ZF^- est consistant alors ZF aussi, autrement dit si on doute de la consistance de ZF, le problème ne peut pas venir de (AF).

N.B : C'est aussi vrai avec V_κ à la place de V, pour κ inaccessible.

Théorème : Si $\mathcal{U} \models ZF^-$ alors $V_\omega \models ZFC \setminus (AI) + \neg(AI)$.

Preuve : Tout a été fait sauf (AC) : or tout élément de V_ω est fini et donc en bijection avec $n \in \omega$ et donc bien ordonnable ∎

N.B : Ce théorème dit que (AI) est indépendant de ZF.

· Sur l'existence de cardinaux inaccessibles.

On considère (CI) : "il existe un cardinal inaccessible" (se dit au premier ordre).

Théorème : Si ZFC est consistant alors $ZFC + \neg(CI)$ est aussi consistant.

Preuve : Soit $\mathcal{U} \models ZFC$. Si $\mathcal{U} \models \neg(CI)$ ok. Sinon on prend κ le cardinal inaccessible minimal de $\mathcal{U}$ et on montre que $V_\kappa \models \neg(CI)$. Comme on sait que $V_\kappa \models ZFC$, on aura le résultat. Par l'absurde si $V_\kappa \models (CI)$. Or il n'est pas difficile de voir que "être un cardinal inaccessible" est absolu pour V_κ donc un λ inaccessible dans V_κ serait un c. inacc. dans $\mathcal{U}$, or on a vu que $\lambda \leq card(V_\kappa) < \kappa$ donc cela contredit la minimalité de κ. ∎

N.B : L'existence de CI est équivalente à la consistance de ZFC, on a donc par Gödel $ZFC \nvDash CI$. Si ZFC est consistant
[illegible] donc [illegible] $ZFC \nvDash \neg CI$ [illegible] le théorème précédent.

Modèles de Fraenkel-Mostowski

L'axiome de fondation de ZF assure que l'on a pas d'élément a tels que $a = \{a\}$. (en particulier $a \in a$). L'idée des modèles de Fraenkel Mostowski est de biaiser dans un modèle de ZF (ou ZFC) l'$\in$ pour faire apparaître de tels éléments (que l'on nomme atomiques). On va donc démontrer la consistance relative de $ZF^- + \neg AF$ et $ZFC^- + \neg AF$. Et donc la non contradiction de $\neg AF$, ou consistance relative de $\neg AF$. Avec la consistance relative de AF (p 60) On montre donc l'indépendance de ZF^- (resp ZFC^-) avec AF, ie $ZF^- \nvDash AF$ et $ZFC^- \nvDash \neg AF$ (pareil pour ZFC^-).

- Modèle de Fraenkel Mostowski: On considère $\mathcal{U} \models ZF^-$

Puis on considère $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ une classe fonctionnelle bijection ($y = F(x)$ ssi $F(x,y)$). On considère alors la relation $\in'$ sur $\mathcal{U}$ définie par

$$x \in' y \quad \text{ssi} \quad \exists z \, (x \in z \wedge F(z,y))$$
$$\text{ssi} \quad x \in F^{-1}(y).$$

Un modèle de Fraenkel Mostowski est alors $\mathcal{U}$ muni de $\in'$; on le note $\mathcal{U}'$; il dépend évidemment de la bijection F choisie. On notera

- Si $\mathcal{U} \models ZFC^-$ alors $\mathcal{U}' \models ZFC^-$:

C'est un (fastidieux) travail de vérification. On ne fait pas tout.

· <u>EXT</u> : Mq $\mathcal{U}' \models \forall x \forall y \forall z((z \in' x \leftrightarrow z \in' y) \to x = y)$

On suppose que $z \in' x$ ssi $z \in' y$ alors $z \in F^{-1}(x)$ ssi $z \in F^{-1}(y)$ donc par extensionnalité de $\in$, $F^{-1}(x) = F^{-1}(y)$ donc $x = y$ puisque F bijective.

· <u>PAIRE</u> : Mq $\mathcal{U}' \models \forall x \forall y \exists z \forall t \, (t \in' z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$.

Pour x, y on veut z tq $t \in' z$ ssi $t = x$ ou $t = y$
donc $t \in F^{-1}(z)$ ssi $t = x$ ou $t = y$ donc $\{x, y\} = F^{-1}(z)$ donc on prend $z = F(\{x, y\})$ c'est bien le z recherché. Autrement dit $\{x, y\}' = F(\{x, y\})$.

· <u>Union</u> : $\mathcal{U}' \models \forall x \exists y \forall z \, (z \in' y \leftrightarrow \exists t \, (t \in' x \wedge z \in' t))$

On cherche donc, pour x donné un ensemble y tel que

$$F^{-1}(y) = \{z \mid \exists t \in F^{-1}(x) \text{ avec } z \in F^{-1}(t)\}$$

Donc $F^{-1}(y) = \bigcup_{t \in F^{-1}(x)} F^{-1}(t)$ et donc $y = F\left(\bigcup_{t \in F^{-1}(x)} F^{-1}(t)\right)$

· <u>Parties</u> : $\mathcal{U}' \models \forall x \exists y \forall z \, (z \in' y \leftrightarrow z \subseteq' x)$

avec $z \subseteq' x$ ssi $\forall t \; t \in' z \to t \in' x$ ssi $\forall t \; t \in F^{-1}(z) \to t \in F^{-1}(x)$
ssi $F^{-1}(z) \subseteq F^{-1}(x)$.

Étant donné x le y cherché vérifie

$$F^{-1}(y) = \{z \mid F^{-1}(z) \subseteq F^{-1}(x)\}$$

$$= \{z \mid F^{-1}(z) \in \mathcal{P}(F^{-1}(x))\}$$

$$= \{F(t) \mid t \in \mathcal{P}(F^{-1}(x))\}$$

Donc le y cherché est $F(\{F(t) \mid t \in \mathcal{P}(F^{-1}(x))\})$

On pourra noter cet ensemble $\mathcal{P}'(x)$ et on a

$y \in \mathcal{P}'(x)$ ssi $y \subseteq' x$.

• <u>REM</u> : Soit $\varphi(x, y, \bar{z})$ une formule fonctionnelle.

Mq $\mathcal{U} \models \forall \bar{z}\ \forall z\ \exists t\ \forall y\ (y \in' t \leftrightarrow \exists x\ x \in' z \wedge \varphi(x, y, \bar{z}))$

Pour $\bar{z}$, z donnés. On met $t =$ "$\varphi[z]$".

On a que $F^{-1}(t) = \{ y \ \exists x \in F^{-1}(z)\ \varphi(x, y, \bar{z}) \}$

Donc $F^{-1}(t)$ est l'image de $F^{-1}(z)$ par $\varphi(x, y, \bar{z})$.

et donc t doit être choisi comme l'image par F de l'image par φ de $F^{-1}(z)$ ce qui a du sens.

• <u>AC</u> : $\mathcal{U} \models \forall f\ [\mathrm{Fct}(f) \wedge \emptyset \notin \mathrm{Im} f] \rightarrow [\exists y\ (\mathrm{Fct}(y) \wedge \mathrm{dom}\, y = \mathrm{dom} f$
$\wedge \forall x\ (x \in' \mathrm{dom}\, y \rightarrow y(x) \in' f(x)))]$

(f est une famille d'ensembles.)

Donc soit donnée f une famille d'ensembles (i.e. $(f(i))_{i \in \mathrm{dom} f}$)

On cherche une fonction de choix, dans le sens de $\in'$ i.e. une fonction y telle que $y(x) \in F^{-1}(f(x))$; $x \in F^{-1}(\mathrm{dom}\, y)$

Il s'agit donc de trouver une fonction de choix sur la famille $(F^{-1}(f(x)))_{x \in F^{-1}(\mathrm{dom} f)}$ ce qui existe par AC dans $\mathcal{U}$.

On a donc bien $\mathcal{U}' \models ZFC^-$.

• <u>On montre que $ZFC^- + \neg AF$ est consistant.</u>

Il suffit de définir F de façon à avoir un atome.

Pour $x \in \mathcal{U}$, on définit F de façon suivante

$$\begin{cases} F(\{x\}) = x \\ F(x) = \{x\} \\ F = \mathrm{Id}|_{\mathcal{U} \setminus \{x\}} \end{cases}$$

On a alors $y \in' x$ ssi $y \in F^{-1}(x)$
ssi $y \in \{x\}$
ssi $y = x$

Donc $x = \{x\}'$.

- On peut de plus choisir $\mathcal{U}'$ tel que l'ensemble X des atomes soit équipotent à ω.

Il suffit de choisir $\begin{cases} F(\{x\}) = x & \text{pour tout } x \in \omega \setminus \{0\} \\ F(x) = \{x\} \end{cases}$

et l'identité partout ailleurs.

On l'exprime par la formule :

$$F(x,y) = (x \in \omega \wedge x \neq 0 \wedge y = \{x\}) \vee (y \in \omega \wedge x = \{y\} \wedge y \neq 0)$$
$$\vee\ (x \notin \omega \setminus \{0\} \wedge x \notin \{\{n\}\ n \in \omega \setminus \{0\}\} \wedge y = x)$$

- Une hiérarchie dans un modèle de Fraenkel-Mostowski.

Posons $\mathcal{A}$ l'ensemble des atomes de $\mathcal{U}'$. On définit par induction transfinie :

$$\begin{cases} W_0 = \mathcal{A} \\ W_{\alpha+1} = \mathcal{P}(W_\alpha) \\ W_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} W_\alpha & \lambda \text{ limite.} \end{cases}$$

Soit W la classe $\exists \alpha\ (\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x \in W_\alpha)$ "réunion des W_α"

On peut montrer que $(W, \in) \models ZF^-$

On peut montrer que

$$W \models \forall a\ (a \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in a.\ (b = \{b\} \vee \forall x \in a\ x \notin b))$$

et que dans W les atomes (pour W) sont exactement les éléments de $W_0 = \mathcal{A}$.

Consistance relative de $\neg AC$ [Kunen]

On montre ici que la consistance de ZF entraine la consistance de $ZF^-(+\neg AC) + \neg AF$. On aura alors que si ZF^- est consistant, $ZF^- + \neg AC$ l'est aussi. On fait référence dans cette feuille à "Modèle de Fraenkel-Mostowski" (p 61). On va montrer que dans un tel modèle contenant des atomes, on peut construire un modèle de ZF^- tel que l'ensemble des atomes ne soit pas totalement ordonnable il sera donc a fortiori pas bien ordonnable ce qui contredit l'axiome du choix, donc ce modèle ne pourra pas vérifier AC.

On se place donc dans un modèle $\mathcal{U} \models ZF^-$ contenant des atomes et tel que l'ensemble A des atomes soit équipotent à ω.

On a de plus la hiérarchie des $(W_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ définie par $W_0 = A$ et $W_{\alpha+1} = \mathcal{P}(W_\alpha)$. On suppose de plus que $\mathcal{U} = W$ où W est la clôture totale des W_α. Ceci est possible grâce à p 64.

- On dit que $e \in \mathcal{U}$ est définissable en termes d'ordinaux et d'atomes (DOA) si $e \in dcl(Ord \cup A)$ ie si e est vérifié dans $\mathcal{U}$ par une formule à paramètres dans $Ord \cup A$ qui ne vérifie que e.

- On dit que e est héréditairement définissable en termes d'ordinaux et d'atomes (HDOA) si tous les éléments de $cl(\{e\})$ sont DOA. (cl = clôture transitive, cf p 39)

On va montrer que HDOA définit une classe qui sera un modèle de $ZF^\circ + \neg AC$. On énonce d'abord un petit lemme.

<u>lemme (L)</u> : e est HDOA ssi e est DOA et tous ses éléments sont HDOA

<u>Preuve</u> : $\boxed{\Rightarrow}$ évident par définition

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que e est DOA et que tous ses éléments sont HDOA.

On a
$$\begin{aligned} cl(\{e\}) &= \{e\} \cup cl(e) \\ &= \underbrace{\{e\}}_{DOA} \cup \underbrace{\bigcup_{x \in e} cl(\{x\})}_{DOA} \end{aligned}$$

donc $cl(\{e\})$ est DOA ■

On va admettre que HDOA et DOA sont des classes définissables par des formules sans paramètres [cf Kunen]

- <u>On montre que HDOA $\supseteq A \cup Ord$</u>

. Pour $a \in A$, on a $a = \{a\}$. Clairement, $\{a\}$ est transitif (preuve $y \in x \in \{a\} \Rightarrow x = a$ donc $y \in a = \{a\}$ donc $y = a$ donc $y \in \{a\}$)
donc $cl(\{a\}) = a$ et si $y \in a$, $y = a$ donc y est bien définissable par $\varphi(x) = x \doteq a$. Donc y est DOA et donc a est HDOA

. Pour $\alpha \in Ord$: on utilise le lemme (L)

. clairement, α est DOA

. par induction, si $\beta \in \alpha$, alors β est HDOA donc on a les conditions du lemme (L) et donc α est HDOA.

- $\mathcal{A}$ ne peut pas être totalement ordonné par un ordre BOA

On utilise ici un lemme :

Lemme (LL) : Soit $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ une permutation. Alors il existe une unique classe fonctionnelle $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ qui est un automorphisme (ou un mod) de $\mathcal{U}$ qui étend τ. De plus $\Sigma(\alpha) = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathrm{Ord}$

Preuve : Soit $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, on définit par approximation Σ.

On rappelle que $\mathcal{U} = W = \text{"}\bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} W_\alpha\text{"}$ avec $W_{\alpha+1} = \mathcal{P}(W_\alpha)$, $W_0 = \mathcal{A}$

- $\tau_0 := \tau$
- $\tau_{\alpha+1}(B) = \{\tau_\alpha(\gamma),\ \gamma \in B\}$
- $\tau_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \tau_\alpha$.

On a $\tau_{\alpha+1} = \tau_\alpha \cup \{(x, \{\tau_\alpha(y), y \in x\}) : x \in W_{\alpha+1} \setminus W_\alpha\}$

On montre par induction que τ_α est un automorphisme.

- Soient $a, b \in \mathcal{A}$, $a \in b$, alors on a $a = b$ donc $\tau(a) = \tau(b) \in \mathcal{A}$ donc $\tau(a) \in \tau(b)$.

On suppose que $\tau_\alpha : W_\alpha \to W_\alpha$ est un automorphisme.

- $\tau_{\alpha+1}$ est bijectif : $x \in W_{\alpha+1}$

$\tau_{\alpha+1}(x) = \{\tau_\alpha(y) \mid y \in x\}$

On considère $f : x \mapsto \{\tau_\alpha^{-1}(y) \mid y \in x\}$.

alors $\tau_{\alpha+1}(f(x)) = \tau_{\alpha+1}(\{\tau_\alpha^{-1}(y) \mid y \in x\})$

$= \{y,\ y \in x\} = x$.

donc $\tau_{\alpha+1}$ admet une bijection réciproque donc est bijective.

On montre que $T_{\kappa+1}(x) \in T_{\kappa+1}(y)$ ssi $x \in y$. $x, y \in W_{\kappa+1}$.

par définition si $x \in y$.

$$T_{\kappa+1}(y) = \{ T_\kappa(z) \quad z \in y \} \ni T_\kappa(x) \text{ car } x \in y$$
$$(= \{ T_{\kappa+1}(z),\ z \in y \})$$

donc $x \in W_\kappa$ car $x \in y$ et $y \in W_{\kappa+1}$.

Ainsi $T_\kappa(x) = T_{\kappa+1}(x)$. donc $T_{\kappa+1}(x) \in T_{\kappa+1}(y)$.

Si $T_{\kappa+1}(x) \in T_{\kappa+1}(y)$ il existe $z \in y$ tq

$$T_{\kappa+1}(x) = T_\kappa(z) = T_{\kappa+1}(z) \text{ car } z \in W_\kappa.$$

par injectivité, on a $x = z$ donc $x \in y$.

Pour λ limite $T_\lambda = \bigcup_{\kappa \in \lambda} T_\kappa$ est une union croissante d'automorphismes, cela reste un automorphisme.

On définit alors $\Sigma(x,y)$ par $\exists \kappa\ (\mathrm{Ord}\,\kappa \wedge x \in W_\kappa \wedge y = T_\kappa(x))$,

donc $\Sigma = \text{``}\bigcup_{\kappa \in \mathrm{Ord}} T_\kappa\text{''}$.

L'unicité de Σ se montre par induction en considérant $\Sigma|_{W_\kappa}$.

Il reste à montrer que $\Sigma(\kappa) = \kappa$ pour tout $\kappa \in \mathrm{Ord}$.

<u>Par induction</u> :

Soit κ le plus petit ordinal tel que $\Sigma(\kappa) \neq \kappa$.

$$\Sigma(\kappa) = T_\kappa(\kappa) = \{ T_\kappa(\beta),\ \beta < \kappa \}$$
$$\overset{\text{minimalité de } \kappa}{=} \{ \beta,\ \beta < \kappa \} = \kappa. \text{ contradiction.}$$

$\Sigma(\emptyset) = \{ \Sigma(x),\ x \in \emptyset \} = \emptyset$.) ∎

On montre que tout ordre total $c \subseteq \mathcal{A}^2$ ne peut pas être
définissable DOA.

Soit alors $c \subseteq \mathcal{A}^2$ un ordre total. On suppose qu'il est DOA, soit donc φ tq

$$\mathcal{U} \models \varphi[c] \quad \text{avec} \quad \varphi(x, \underbrace{\kappa_1 \dots \kappa_n}_{\text{param. dans Ord}}, \underbrace{a_1 \dots a_m}_{\text{param. dans } \mathcal{A}})$$

Comme $\mathcal{A}$ est de cardinal ω, il existe $a, b \in \mathcal{A}$ tels que $\{a, b\} \cap \{a_1, \dots, a_m\} = \emptyset$. Soit donc $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ tq $\sigma = (a, b)$ (ie $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = a$). Soit alors Σ l'application dans associée selon le lemme (LL). On a alors ; puisque c'est un automorphisme.

$$\mathcal{U} \models \varphi[c] \text{ ssi } \mathcal{U} \models \varphi[\Sigma(c)]$$

$$\text{ssi } \mathcal{U} \models \varphi(\Sigma(c), \Sigma(\kappa_1) \dots \Sigma(\kappa_n), \Sigma(a_1) \dots \Sigma(a_m))$$

$$\text{ssi } \mathcal{U} \models \varphi(\Sigma(c), \underbrace{\kappa_1 \dots \kappa_n}_{\text{car } \Sigma|_{\mathrm{Ord}} = \mathrm{id} \text{ Lemme (LL)}}, \underbrace{a_1 \dots a_m}_{\text{car } \sigma = (a, b)})$$

On a donc $c = \Sigma(c)$

or $(a, b) \in c$ ssi $(b, a) \in \Sigma(c)$

Donc la relation c ne peut pas être antisymétrique. Ce ne peut pas être un ordre.

N.B : Le résultat que l'on a montré est que toute relation $R \subseteq \mathcal{A}^2$ totale ne peut vérifier $xRy \to \neg yRx$.

- <u>HDOA $\models \neg AC$</u>

Le résultat précédent montre que DOA $\models \neg AC$ puisque on ne peut définir de bon ordre sur le sous ensemble $\mathcal{A} \subseteq$ DOA. On ne peut donc pas définir de bon ordre héréditairement pour qu'un ensemble soit HDOA il est nécessaire qu'il soit DOA par lemme 2 donc HDOA $\models \neg AC$.

• HDOA $\models$ ZF$^-$:

• EXT : HDOA est transitif et donc vérifie EXT.

• UNION : Il s'agit de montrer que

$$\mathrm{HDOA} \models \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow (\exists t\ t \in x \wedge z \in t))$$

Autrement dit

$$\mathcal{U} \models (\text{---})^{\mathrm{HDOA}}$$

Donc pour $x \in \mathrm{HDOA}$, il faut montrer que

$$\mathcal{U} \models \exists y \in \mathrm{HDOA}\ \forall z \in \mathrm{HDOA}\ (z \in y \leftrightarrow (\exists t \in \mathrm{HDOA}\ t \in x \wedge z \in t)),$$

par transitivité de HDOA.

$$\mathcal{U} \models \exists y \in \mathrm{HDOA}\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow (\exists t\ t \in x \wedge z \in t))$$

On prend $y = (\bigcup x)^{\mathcal{U}} \cap \mathrm{HDOA}$, et cela marche.

• PART : Soit $a \in \mathrm{HDOA}$, où $b = \mathcal{P}(a) \cap \mathrm{HDOA}$ est l'ensemble des parties de a dans HDOA. Il s'agit de montrer que $b \in \mathrm{HDOA}$. (Puisque $b \subseteq \mathrm{HDOA}$), par le lemme (L).

$$\varphi_b(u) = \exists a\, (\varphi_a(a) \wedge \forall y\, (y \in u \leftrightarrow (y \subseteq a) \wedge \mathrm{HDOA}(y)))$$

où a est défini par $\varphi_a(a)$, donc $b \in \mathrm{DOA}$.

• REM : On prend une relation fonctionnelle de HDOA et on montre qu'il existe, pour un $a \in \mathrm{HDOA}$, un $b \in \mathrm{HDOA}$ tel qu'il soit l'ensemble des images des elts de a par la fct.

Soit donc $\varphi(x, y, \bar{z}, \bar{a})$ une fonctionnelle dans HDOA.

et $\tilde{\varphi}(x, y, \bar{z}, \bar{a}) = \mathrm{HDOA}(x) \wedge \mathrm{HDOA}(y) \wedge \varphi(x, y, \bar{z}, \bar{a})$

est donc fonctionnelle dans $\mathcal{U}$. Donc $\varphi[a] \in \mathcal{U}$

$$\varphi[a] = \{ y \mid \exists x \in a\ \varphi(x, y, \bar{z}, \bar{a}) \}$$

Soit donc $b = HDOA \cap \varphi[a]$

Pour montrer que $b \in HDOA$, comme $b \subseteq HDOA$ il suffit par le lemme (L) de montrer que b est DOA. Soit φ_a la formule définissant a.

$$\varphi_b(x) = \forall z \; z \in x \leftrightarrow HDOA(z) \wedge \exists u \in a \; \varphi(u, y, \bar{x}, \bar{a})$$

comme a, $\bar{a}$, $\bar{x}$ sont DOA, b est bien DOA et donc $b \in HDOA$. Donc REM est satisfait par HDOA.

- On a donc que $HDOA \models ZF^- + \neg AC$.

De plus comme $\mathcal{A} \subseteq HDOA$ $HDOA \models \neg AF$.

Le schéma de réflexion. (ZF⁻)

Avant d'introduire le schéma de réflexion, on aura besoin de quelques définitions.

Déf : Une classe $X \subseteq \mathrm{Ord}$ est dite <u>club</u> si
(a) $\forall x \ (x \subseteq X \Rightarrow \sup x \in X)$ (closed)
(b) $\forall \beta_{\in \mathrm{Ord}} \ \exists \alpha \ (\alpha \in X \wedge \alpha \geq \beta)$ (unbounded)

On rappelle qu'une classe fonctionnelle est dite <u>normale</u> si elle est croissante et continue. On a la propriété suivante : l'image d'une fonction normale $\mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ est club (ainsi donc toute classe) réciproquement toute classe club $X \subseteq \mathrm{Ord}$ est l'image d'une unique classe fonctionnelle. Il est facile de vérifier que l'intersection de deux classes clubs est encore une classe club.

- On considère $(W_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$ une <u>hiérarchie continue d'ensembles</u>. (i.e. $W_\alpha \subseteq W_\beta$ $\alpha \leq \beta$ et $W_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} W_\beta$ λ lim).

Soit $W(x) = \exists \alpha \ (x \in W_\alpha)$ [(1)] la classe associée.

$\varphi(\bar{x})$ une formule. On dit que <u>W_α reflète φ</u> si

$$ZF^- \vDash \forall \bar{x} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \in W_\alpha \rightarrow \left(\varphi^W(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^{W_\alpha}(\bar{x}) \right) \right)$$

Autrement dit, <u>dans W</u>, φ est absolue pour W_α.

<u>Exemple</u> : Dans V il est vrai que $V \vDash \forall x \ \exists y \ y = P(x)$.

Ceci n'est pas vrai dans par exemple $V_2 = \{\phi, \{\phi\}\}$ car $P(\{\phi\}) = V_2 \notin V_2$.
Donc V_2 ne reflète pas $\forall x \ \exists y \ y = P(x)$. En revanche,
V_2 reflète $(\forall x \ \forall z, \ z \in x \rightarrow \exists y \ z = y)$ (V_2 transitif).

W_α reflète φ si W_α ressemble à W vu à vis de la propriété φ.

---

(1) : $(W_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$ est donné par une classe fonctionnelle $\begin{array}{l}\mathrm{Ord} \xrightarrow{F} \mathcal{U} \\ \alpha \mapsto W_\alpha \in \mathcal{U}\end{array}$ par $\mathcal{U} \vDash \varphi(\alpha, W_\alpha)$. Ensuite

On se donne donc une hiérarchie continue d'ensembles $(W_\alpha)_{\alpha \in On}$ et W la classe associée. On remarque que la collection des $\{\alpha \text{ tq } W_\alpha \text{ reflète } \varphi\}$ est définissable pour un φ donné. On peut donc considérer la classe $\{\alpha \text{ tq } W_\alpha \text{ reflète } \varphi\}$, le schéma de réflexion est le fait que cette classe, qui représente dans quelle proportion W_α ressemble à W d'un point de vue de φ, est une classe grande, dans le sens où c'est un club.

Théorème : (Schéma de réflexion général)

> Soit $(W_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ une hiérarchie continue d'ensembles de classe associée W. φ une $\mathcal{L}_\in$-formule.
> Alors la classe $\{\alpha \text{ tq } W_\alpha \text{ reflète } \varphi\}$ contient une classe club

On fait la même opér. En utilisant que deux classes club dans Ord s'intersecte en une classe club on peut avoir le résultat que $\forall \varphi_1 \dots \varphi_n$, la classe $\{\alpha \text{ tq } W_\alpha \text{ reflète } \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \dots \text{ et } \varphi_n\}$ contient une classe club. On a aussi les deux corollaires suivants, sous les mêmes hypothèses :

Corollaire : Soit φ une formule $x \subseteq W$ un ensemble. Alors

> il existe $\alpha \in Ord$ tq
> - W_α reflète φ
> - $x \subseteq W_\alpha$

Preuve : Autrement dit on peut toujours refléter φ dans un W_α aussi grand que l'on veut, puisque c'est une classe club :

On utilise Rg_W : $W \longrightarrow Ord$
$x \longmapsto$ le plus petit α tq $x \in W_{\alpha+1}$.

Par remplacement $R_W[x]$ est un ensemble d'ordinaux donc $\subseteq \beta$. Comme $\{\alpha \text{ tq } W_\alpha \text{ reflète } \varphi\}$ n'est pas borné, il existe $\alpha > \beta$ avec W_α reflète φ.

Le corollaire suivant est immédiat, en considérant que dans ZF [12]
$V = \mathcal{U}$ donc si $y \in \mathcal{U}$, (pour un certain φ) on a $y \subseteq V$ et donc
il y a un $V_\alpha \supseteq y$ tq V_α reflète φ dans $\mathcal{U} = V$ donc ici
cela veut dire que φ est absolue pour des V_α aussi grands que l'on veut.
i.e :

Corollaire : (Schéma de Réflexion)

> φ $\mathcal{L}_e$ formule.
>
> $$ZF \models \forall y\ \exists \alpha \in Ord\ \left(y \in V_\alpha \wedge \forall \bar{x}\ \left(\bigwedge_{i \leq 1} x_i \in V_\alpha \rightarrow (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^{V_\alpha}(\bar{x})\right)\right)$$

(ZF) : "Pour toute formule, $\exists \alpha$ tq V_α reflète φ"

Preuve du schéma de réflexion généralisé :

On se donne alors $(W_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ une hiérarchie continue d'ensembles et W la classe associée. On montre par induction sur φ que $W(\varphi) \{ \alpha \text{ tq } W_\alpha \text{ reflète } \varphi\}$ contient une classe club. (dans Ord).

- φ atomique : Ok car $\varphi^W = \varphi^{W_\alpha} = \varphi$ donc l'ensemble $W\varphi = Ord$ est bien club.
- $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$: Ok car l'intersection de deux classes clubs reste une classe club.
- $\varphi = \neg \psi$: Ok car si W_α reflète ψ, W_α reflète aussi $\neg\psi$.

Le partie non triviale est le cas $\varphi = \exists y\ \psi(\bar{x}, y)$.
Par hypothèse d'induction il existe une classe club $Q \subseteq Ord$ tq W_α reflète ψ pour tout $\alpha \in Q$.
On va construire une classe d'ordinaux $R \subseteq Ord$ telle que :

(1) R est club

(2) $R \subseteq Q$ $\quad (\mathcal{U} \models \forall x\ R(x) \rightarrow Q(x))$

(3) $ZF^- \models \forall \alpha\ \forall \bar{x}\ \left(R(\alpha) \wedge \bigwedge_{i \leq 1}^{n} x_i \in W_\alpha\right) \wedge \exists y\ (W(y) \wedge \psi^W(\bar{x}, y)) \rightarrow \exists y\ (W_\alpha(y) \wedge \psi^W(\bar{x}, y))$

En supposant que l'on ait un tel R, on aura alors le théorème,

en effet, R est club, et si $\alpha \in R$, $\bar a \in W_\alpha$

$$\mathcal{U} \models \varphi^{W_\alpha}[\bar a] \text{ ssi } \mathcal{U} \models \exists y \, (y \in W_\alpha \wedge \varphi^{W_\alpha}(\bar x, y))\, [\bar a]$$

$R \subseteq Q \to$

$$\text{ssi } \mathcal{U} \models \exists y \, (y \in W_\alpha \wedge \varphi^{W}(\bar x, y))\, [\bar a]$$

$\Rightarrow$ car $W_\alpha \subseteq W$
$\Leftarrow$ (?)

$$\text{ssi } \mathcal{U} \models \exists y \, (y \in W \wedge \varphi^{W}(\bar x, y))\, [\bar a]$$

$$\text{ssi } \mathcal{U} \models \varphi^{W}[\bar a]$$

Et donc W_α reflète φ.

<u>On construit la classe R</u>

On pose
$$X(\alpha) := \forall \bar x \left(\bigwedge_{i<l} x_i \in W_\alpha \wedge (\exists y \in W)\, \varphi^W(\bar x, y) \longrightarrow (\exists y \in W_\alpha)\, \varphi^W(\bar x, y) \right)$$

« si on a un témoin pour $\varphi^W(\bar x, \cdot)$ <u>dans W</u> alors on a un témoin pour $\varphi^W(\bar x, \cdot)$ <u>dans W_α</u>. »

On montre que l'on a la propriété suivante

$$(\dagger) \quad \forall \beta \, \exists \alpha \, (\beta < \alpha \wedge Q(\alpha) \wedge X(\alpha))$$

« On peut trouver un $\alpha \in Q$ tq $X(\alpha)$, α aussi grand que l'on veut ».

<u>Preuve de $(\dagger)$</u> : Comme d'hab, on trouve $\alpha \in Q$ comme limite d'une suite croissante d'ordinaux $(f(i))_{i \in \omega = \mathbb{N}}$ avec $f(i) \in Q$ $\forall i \in \omega$

On pose $f(0) := \beta + 1$.

$f(i+1) :=$ le plus petit $\gamma > f(i)$ tq W_γ contienne un témoin de $\mathcal{U} \models (\exists y \in W) \wedge \varphi^W[\bar a]$ et $\gamma \in Q$ pour tout $\bar a \in W_{f(i)}^n$ on ...

L'ensemble $\{ \gamma \in Q \mid \gamma > f(i)$ et $\exists y \in W_{f(i)}\, \varphi^W(\bar x, y) \ \forall \bar x \}$

est un ensemble $\neq \emptyset$ par ... (Q club) et on prend le minimum de cet ensemble.

On peut ensuite $\alpha := \sup_{i \in \omega} (f(i))$, alors $\alpha \in Q$ comme Q est fermé

et α vérifie $(\dagger)$. $\square(\dagger)$.

Pour construire R, l'idée est de prendre R comme image d'une classe fonctionnelle normale que l'on définit par induction transfinie ; grâce à (†)

. $F(0) :=$ le plus petit γ tq $\gamma \in Q$ et $\chi(\gamma)$

. $F(\alpha+1) :=$ le plus petit $\gamma > F(\alpha)$ tq $\gamma \in Q \wedge \chi(\gamma)$ par (†)

. $F(\delta) := \sup\limits_{\alpha < \delta} (F(\alpha))$ δ limite

$F : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ est bien défini par induction transfinie.

Montrons que $R := \mathrm{Im}\, F$ vérifie (1), (2) et (3) :

(1) R est clos en tant qu'image d'une classe fonctionnelle normale.

(2) par construction $F(\alpha) \in Q$ donc $R \subseteq Q$.

(3) Par construction on a $\chi(F(0))$ et $\chi(F(\alpha+1))$

et si δ limite, $F(\delta)$ aussi (par construction)

et $W_{F(\delta)} = \bigcup\limits_{\beta < \delta} W_{F(\beta)}$ et comme

$\mathcal{U} \models \chi(F(\beta))$ $\forall \beta < \delta$ on a également $\mathcal{U} \models \chi(F(\delta))$

On a donc construit R et montré le théorème. ∎

On peut aussi déduire grâce au principe de réflexion le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : Soit $T \supseteq ZF$ consistante. Alors T n'est pas finiment axiomatisable

En effet il arrive que des théories finiment axiomatisables soient des sous-théories de théories non finiment axiomatisables. Par exemple une théorie finie étendant la théorie des ensembles infinis et DLO

Ce théorème nous dit que l'on ne peut pas renforcer ZF pour la rendre finiment axiomatisable.

— 7

(CH) pour les boréliens de $\mathbb{R}$ (ZFC)

Dans cette section, on montre que (CH) tient pour les boréliens fermés de $\mathbb{R}$, i.e. que si l'on prend une partie fermée borélienne de $\mathbb{R}$, son cardinal s'il est infini est soit $\aleph_0$ soit $2^{\aleph_0}$. Par passage au complémentaire on montrera que c'est vrai aussi pour les ouverts et tous les boréliens.

On rappelle que la <u>tribu borélienne</u> d'un espace topologique est la tribu engendrée par la topologie.

Autrement dit <u>$\mathcal{B}$ la tribu borélienne</u> de $\mathbb{R}$:

- $\mathcal{B}$ contient la topologie de $\mathbb{R}$ (i.e. tous les ouverts)
- $X \in \mathcal{B}$ implique $X^c \in \mathcal{B}$ (en particulier les fermés)
- $(A_i)_{i \in \omega} \in \mathcal{B}$ alors $\bigcup_I A_i \in \mathcal{B}$

Le théorème dû à Cantor s'énonce ainsi :

<u>Théorème (Cantor, ZFC)</u>

> Soit $F \subseteq \mathbb{R}$ fermé. Alors ou bien $\operatorname{card} F \leq \aleph_0$ ou bien $\operatorname{card}(F) = 2^{\aleph_0}$.

Et son corollaire est le résultat que l'on veut :

<u>Théorème (CH pour les boréliens de $\mathbb{R}$)</u> :

> Si $B \subseteq \mathbb{R}$ est un borélien alors $\operatorname{card}(B) \leq \aleph_0$ ou $\operatorname{card}(B) = 2^{\aleph_0}$

<u>Preuve</u> : Soit $B \in \mathcal{B}$ (infini) soit B est fermé et c'est par le théorème de Cantor, si B est ouvert son complémentaire est un fermé infini donc soit $\aleph_0$ soit $2^{\aleph_0}$ donc B est de card $\aleph_0$ ou $2^{\aleph_0}$. Enfin si $B = \bigcup_\omega A_i$ avec B non dénombrable alors un des A_i est non dénombrable donc de card $2^{\aleph_0}$ et donc $\operatorname{card} B = 2^{\aleph_0}$. ∎

Pour montrer le théorème de Cantor on va avoir besoin de la notion d'arbre dans ZFC.

. Les arbres dans ZFC :

Définition : Un arbre est un ensemble muni d'un ordre $(T, \leq_T)$ partiel tel que l'ensemble des prédécesseurs d'un élément est bien ordonné, i.e $\forall t \in T$, $\hat{t} := \{s \in T,\ s <_T t\}$ est bien ordonné.

Si l'arbre a un plus petit élément, on l'appelle la racine de l'arbre.

Un sous arbre de $(T, \leq_T)$ est un arbre qui est une sous structure de $(T, \leq_T)$. Toute sous structure d'un arbre est un sous arbre.

Exemple : . Un ensemble bien ordonné.

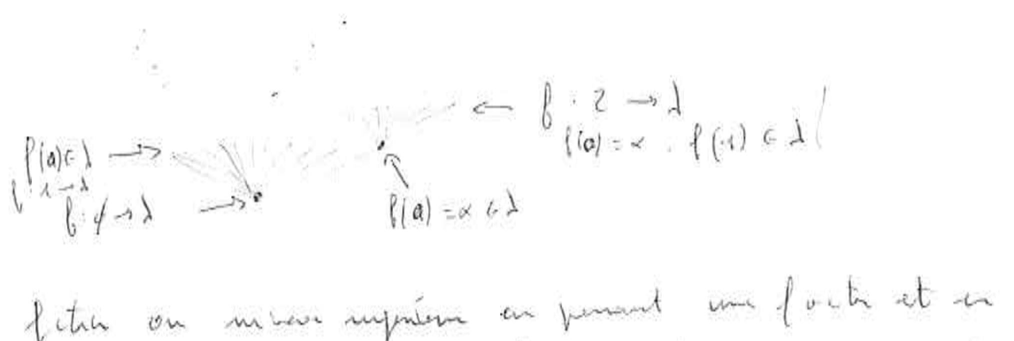
.  est un arbre |  est un arbre | 

ce n'est pas un arbre car les prédécesseurs de 1 sont 2 et 3 et $\{2,3\}$ n'est pas bien ordonné (ni pas totale).

. λ un cardinal, δ un ordinal limite :

alors $$\lambda^{<\delta} := \bigcup_{\alpha \in \delta} \lambda^\alpha = \{ f : \alpha \to \lambda \mid \alpha \in \delta \}$$

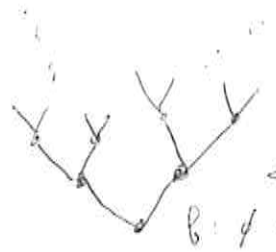
ordonné par $\subseteq$ des graphes, i.e $f \leq g$ ssi $g_{|\mathrm{dom} f} = f$ est un arbre.



On définit un fils ou niveau supérieur en prenant une fonction et en rajoutant l'image d'un élément manquant. Par exemple, au niveau α si l'on a f, les branches au dessus de f seront les $g : \alpha + 1 \to \lambda$ avec $g_{|\alpha} = f$ et $g(\alpha) =$ un élément dans λ. En particulier il y a

Exemple : (Arbre binaire complet le long de ω)

C'est l'arbre $2^{<\delta}$. L'arbre $2^{<\omega}$ mon intéressant :



$\leftarrow f : 1 \to 2$ soit $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

$f : \emptyset \to 2$

soit $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

- On appellera pour un arbre T, et $t \in T$, la **hauteur de t** notée $ht(t) := ot((\hat{t}, \leq_T)) \in Ord$.

  bien ordonné

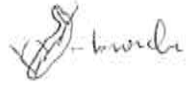
- La **hauteur de l'arbre T** est $ht(T) := \sup\{ht(t)+1 \mid t \in T\}$

- Pour $\alpha \in Ord$: $T(\alpha) := \{t \in T \mid ht(t) = \alpha\}$ l'ensemble des éléments de niveau α.

- $T_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} T(\beta)$

- Un **chemin** $P \subseteq T$ est une chaîne close par prédécesseurs, ie $(P, \leq)$ est totalement ordonné et $t \in P \Rightarrow \hat{t} \subseteq P$.

- Une **branche** est un chemin de taille maximal pour $\subseteq$



- Une branche $B \subseteq T$ est dite **cofinale** si $B \cap T(\alpha) \neq \emptyset \quad \forall \alpha < ht(T)$. Autrement dit
$$ot((B, \leq)) = ht(T).$$

NB : . Le rang de fondation de $(T, \leq)$ (bien défini car T bien fondé) correspond à $ht(.)$.

. Par (ZL) tout chemin est contenu dans une branche.

Exemples : Dans $2^{<\delta}$

- On a $ht(f) = \mathrm{dom}\, f \in \delta$

Et comme δ limite

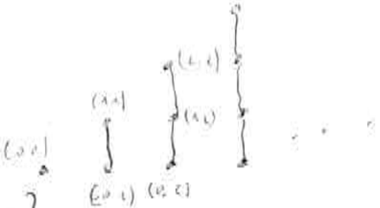
- $ht(2^{<\delta}) = \sup\{ht(f)+1 \mid f \in 2^{<\delta}\} = \sup\{\alpha+1 ; \alpha \in \delta\}$

$$= \delta.$$

- Toute branche est cofinale, les branches sont de la forme

$$\{f|_\alpha \mid \alpha \in \delta \text{ et } f \in 2^\delta\}$$

Exemple : Un arbre sans branche cofinale :



δ limite et $I_\delta := \{(\alpha,\beta),\ \alpha \le \beta < \delta\}$

On définit l'ordre sur I_δ par

$$(\alpha,\beta) \le (\alpha',\beta') \text{ ssi } \beta = \beta' \text{ et } \alpha \le \alpha'$$

Toute branche dans I est de la forme

$$\{(\alpha,\beta) \mid \alpha \le \beta\} \text{ pour un } \beta \in \delta$$

Donc aucune n'est cofinale

Exemple : $2^{<\omega}$: C'est l'ensemble des fonctions $n \to 2$ pour $n \in \omega$

- pour $f \in 2^{<\omega}$, $ht(f) = \mathrm{dom}\, f \in \omega$ c'est un entier.
- Card $2^{<\omega} = \aleph_0$ (~~un simple argument diagonal suffit~~).

puisque $2^{<\omega} = \bigcup_{k<\omega} \underbrace{2^k}_{\text{fini}}$.

• Preuve du théorème de Cantor :

L'idée de la preuve est la suivante :

• On prend un fermé F de $\mathbb{R}$ que l'on suppose de cardinal $> \aleph_0$ et on va montrer qu'il est de cardinal $2^{\aleph_0}$. On va lui associer un sous ensemble F' qui aura une certaine propriété, celle que l'intersection avec tout ouvert en un ensemble non dénombrable dès lors que cette intersection est non vide. On va ensuite montrer qu'il y a une injection de 2^{ω} dans F', comme 2^{ω} est de cardinal $2^{\aleph_0}$ on en conclura que $\operatorname{card} F' \geq 2^{\aleph_0}$ et donc $\operatorname{Card} F' = \operatorname{Card} F = 2^{\aleph_0}$ puisque ce sont des sous ensembles de $\mathbb{R}$ qui est de cardinal $2^{\aleph_0}$.

• Soit donc $F \subseteq \mathbb{R}$ un fermé de cardinal $> \aleph_0$ (ex: $\mathbb{R}$)

On considère
$$C = \left\{ x \in F \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tout voisinage de } x, \Omega \\ \Omega \cap F \text{ dénombrable} \end{array} \right\}$$

et soit $F' = F \setminus C$.

Lemme 1.
(1) C est dénombrable
(2) F' est un fermé de F
(3) Pour tout ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $\Omega \cap F \neq \emptyset \Rightarrow \Omega \cap F$ non dénombrable.

Preuve du lemme 1 :

(1) Cela vient du fait que $\mathbb{R}$ admet une base de voisinage dénombrable ($\mathbb{R}$ est séparable)
Les intervalles de la forme $]-q, q'[$, $q, q' \in \mathbb{Q}$ forment une base pour la topo. Soit donc $x \in C$ il existe $]q_x, q_x'[$ tq $\operatorname{Card}(F \cap]q_x, q_x'[) \leq \aleph_0$.
On pose $\mathcal{I} := \left\{]q, q'[\;\middle|\; \begin{array}{l} q, q' \in \mathbb{Q} \text{ et} \\ \operatorname{card}(F \cap]q,q'[) \leq \aleph_0 \end{array} \right\}$
On a que $\forall x \in]q, q'[\in \mathcal{I}$, $x \in C$ donc
$C = \bigcup (F \cap I)$ donc $\operatorname{card} C \leq \sum \operatorname{card}(F \cap I) = \aleph_0 . \aleph_0 =$

Le point (2) vient du fait que $C = \bigcup_{I \in \Omega} (F \cap I)$ donc comme $F \cap I$ est un ouvert de F, C est un ouvert de F donc F' est un fermé de F.

Le (3) est par définition : si $x \in \Omega \cap F'$ et $\Omega \cap F'$ est dénombrable, comme $F' \subseteq F$ x admet un voisinage qui s'intersecte avec F de manière dénombrable donc $x \in C$ contradiction (on utilise que card F = card F' donc card $F' \cap \Omega$ non dénombrable et card $F \cap \Omega$ non dénombrable

Lemme □

Lemme 2 : Il existe une famille d'intervalles $(I_s)_{s \in 2^{<\omega}}$ telle que $I_s \subseteq \mathbb{R}$ $\forall s \in 2^{<\omega}$ et $I_s =]a_s, b_s[$ $\quad |s| = \mathrm{dom}\, s$ - lh(

(i) $\mathrm{diam}(I_s) = b_s - a_s \leq 3^{-|s|}$

(ii) $I_s \cap F' \neq \emptyset$ $\forall s$ $\left(\text{card}(I_s \cap F') > \aleph_0\right)$

(iii) $\overline{I_{s^\frown 0}} \cap \overline{I_{s^\frown 1}} = \emptyset$ et $\overline{I_{s^\frown 0}} \subseteq I_s \supseteq \overline{I_{s^\frown 1}}$

Notation : Pour $s : n \to 2$ $\quad s^\frown 0 : n+1 \to 2$

$s^\frown 0|_n = s \quad s^\frown 0(n) = 0$

$s^\frown 1 : n+1 \to 2$

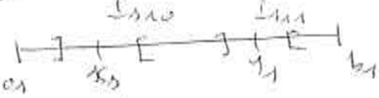
$s^\frown 1|_n = s \quad s^\frown 1(n) = 1$

Preuve du lemme 2 : Par induction sur $s \in 2^{<\omega}$ (2 cas $s^\frown 0$, $s^\frown 1$)

- $I_\emptyset$:= un ouvert de diamètre 1 tq $I_\emptyset \cap F' \neq \emptyset$
- I_s construit : $I_s =]a_s, b_s[$ $\quad I_s \cap F'$ non dénombrable par hyp

Comme par le lemme 1, (3) $I_s \cap F'$ est non dénombrable implique que on peut trouver x_s, y_s tels que

$a_s < x_s < y_s < b_s$



On peut alors $\varepsilon_s := \min\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{-(|s|+1)}, \frac{x_s - a_s}{2}, \frac{b_s - y_s}{2}, \frac{y_s - x_s}{2}\right)$

et enfin $I_{s^\frown 0} :=]x_s - \varepsilon_s, x_s + \varepsilon_s[$

I_{s10} et I_{s11} sont deux voisinages ouverts de x_1, y_1 resp.
comme $x_1, y_1 \in F'$ ils s'intersectent non trivialement avec F' donc
$I_{s10} \cap F'$ et $I_{s11} \cap F'$ sont non dénombrables.
Les (i) et (iii) sont vérifiés par construction.

lemme 2 ☒

• Pour la déduction finale, on construit une injection

$$h : 2^{\omega} \longrightarrow F'.$$

On dispose de $(I_s)_{s \in 2^{<\omega}}$ selon le lemme 2.

Pour $\sigma \in 2^{\omega}$, et $n \in \omega$, on constate que $\sigma_{|n} \in 2^{<\omega}$

On annonce donc X_σ et x_σ et on a les propriétés suivantes :

a) $X_\sigma := \bigcap_{n \in \omega} \overline{I_{\sigma|n}} = \{ x_\sigma \}$ $\quad x_\sigma \in F'$

b) $x_\sigma \neq x_\tau \quad \sigma \neq \tau \in 2^{\omega}$.

a) est la propriété des fermés emboîtés dans le compact $I_\emptyset \cap F'$.

b) On suppose que $x_\sigma = x_\tau$, et soit n minimal tel que $\sigma(n) \neq \tau(n)$, alors par (ii) du lemme 2 on a

$$\overline{I_{\sigma|n+1}} \cap \overline{I_{\tau|n+1}} = \emptyset$$ ce qui est absurde car x_σ et x_τ sont dans les 2.

Ainsi, par b), $h := \begin{array}{l} 2^{\omega} \longrightarrow F' \\ \sigma \longmapsto x_\sigma \end{array}$ est injective

et donc card $F' \geq 2^{\aleph_0}$ i.e. card $F' = 2^{\aleph_0}$ ☒

Ordre bien fondé et récurrence : collapse de Mostowski (ZF)

Étant donné un ensemble (X, R) $\in U$ muni d'une relation de bon ordre, il s'agit de montrer que l'on a un principe de récurrence sur (X, R), ce qui nous permettra d'aboutir à un résultat : tout ensemble bien fondé extensionnel est isomorphe à un ensemble transitif $(Y, \in)$ de U. Cet ensemble est appelé collapse de Mostowski.

- La définition par récurrence dans les ensembles bien fondés

On considère $X \in U$ et $R \subseteq X \times X$ une relation bien fondée, i.e. toute partie $\neq \emptyset$ de X admet un élément R-minimal. $\mathrm{Pred}_R(x) = \{y \in X,\ yRx\}$

Proposition : Soit G une classe fonctionnelle $G : X \times U \to U$

Alors il existe une unique application f de domaine X tq $\forall x \in X \quad f(x) = G(x, f_{|\mathrm{Pred}_R(x)})$

Preuve : Unicité : Supposons que f et g vérifient

$$f(x) = G(x, f_{|\mathrm{Pred}_R(x)}) \quad \text{et} \quad g(x) = G(x, g_{|\mathrm{Pred}_R(x)})$$

On considère l'ensemble $Y = \{x \in X \mid g(x) \neq f(x)\}$

On veut montrer que $Y = \emptyset$. Supposons que non, alors il existe un élément minimal $x_0 \in Y$. Par minimalité, $\forall y \in X$ tq yRx on a $g(y) = f(y)$ donc $g_{|\mathrm{Pred}(x_0)} = f_{|\mathrm{Pred}(x_0)}$ et donc $f(x_0) = G(x_0, f_{|\mathrm{Pred}\, x_0}) = G(x_0, g_{|\mathrm{Pred}(x_0)}) = g(x_0)$

Ce qui contredit que $x_0 \in Y$.

Existence : On a montré que pour n'importe quel X bien fondé, un tel f était unique. On va s'en servir pour construire f.

On va construire f par approximation. Pour $x \in X$, on pose

$$C(x) = \{ y \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists z_1 \dots z_n \in X \; y R z_1 R z_2 \dots R z_n R \} \cup \{x\}$$

On considère l'ensemble :

$$Z = \{ x \in X \mid \neg \overbrace{(\text{il existe } f_x \text{ tq } \operatorname{dom} f_x = C(x) \quad f_x(y) = G(y, f_{x|\mathrm{Pred}\, y}) \; \forall y \in C(x))}^{(*)_x} \}$$

N.B : Si f_x existe elle est unique par la partie 1.

- On montre que Z est vide

Supposons que non, alors il existe $x_0 \in Z$ minimal.

On veut aboutir à une contradiction, on va donc trouver une fonction f vérifiant $(*)_{x_0}$. Par minimalité, pour tout $y \in \mathrm{Pred}(x_0)$ il existe une fct f_y.

Soit donc $z \in C(x_0) \setminus \{x_0\}$, il existe $y \in \mathrm{Pred}(x_0)$ tq $z \in C(y)$. Pour cet y il existe f_y unique avec $f_y(z) = G(z, f_{y|\mathrm{Pred}\, z})$.

On pose alors $f(z) := \begin{cases} G(x_0, f_y) & \text{si } z = x_0 \\ f_y(z) & \text{si } z \neq x_0 \end{cases}$

pour $z \in C(x_0)$. Par unicité de f_y, $f_y(z)$ est bien défini pour tout z et de même $\operatorname{dom} f_y = \mathrm{Pred}(x_0)$ donc $G(x_0, f_y)$ a bien unicité. On a donc montré que x_0 vérifiait $(*)_{x_0}$ donc contradiction, $Z = \emptyset$ et donc

Pour tout $x \in X$ il existe f_x avec $\operatorname{dom} f_x = C(x)$ et

$\neg f_x(x) = G(x, f \dots$ [illegible]

$$f(x) := f_x(x)$$

Et ceci est bien défini car si xRy $f_x(x) = f_y(x)$ puisque $f_x = f_y|_{\mathrm{Pred}\, y}$. On a donc $f_x|_{\mathrm{Pred}\, x} = f|_{\mathrm{Pred}\, x}$ et donc

$$f(x) = G(x, f_x|_{\mathrm{Pred}\, x}) = G(x, f|_{\mathrm{Pred}\, x})$$ et f est bien définie. ☒

<u>N.B.1</u> : On a ici défini f comme une fonction formelle, i.e. un élément de $\mathcal{U}$, c'est parce que l'on a considéré $X \in \mathcal{U}$. On a aussi tous ces résultats vrais pour des classes et en particulier la proposition précédente est vraie pour définir des classes fonctionnelles.

<u>N.B.2</u> : On a déjà dans la preuve précédente comment le principe de récurrence se généralise dans les ensembles bien fondés, i.e. lorsque l'on considère l'élément minimal vérifiant la propriété que l'on veut montrer fausse, c'est exactement dire que l'on suppose la propriété vraie jusqu'au rang n et que l'on veut la montrer au rang $n+1$, puisque les éléments de rang inférieurs à l'élément minimal vérifient la propriété souhaitée par minimalité. On introduit la notion de rang qui apparaît naturellement dans tout ensemble bien fondé.

• <u>Le rang dans les ensembles bien fondés</u>

On définit naturellement : pour $x \in X$

$$rg_R(x) = \sup \{ rg_R(y) + 1 \mid yRx,\ y \in X \}$$

A l'aide de la proposition précédente. Il est aisé de montrer des y tels que $Rg_R(y)$ soit pas un ordinal, il y aurait un élément minimal x_0 et donc

les rangs des éléments de $Pred_R(x_0)$

seraient des ordinaux, donc pour $y \in Pred(x_0)$, $rg_R(y)+1$ serait aussi un ordinal et le sup aussi donc x_0 serait un ordinal, ce qui est absurde, donc $Rg_R(y)$ est un ordinal $\forall y \in X$.

Remarque : Si X est transitif et $R = \in$ alors le $rg_\in$ est le rang de fondation, ie le plus petit α tel que $x \in V_\alpha$.

∘ <u>Collapse de Mostowski</u> :

On suppose ici que R est extensionnelle[1]. On va montrer que (X, R) est isomorphe à $(Y, \in)$ pour $Y \in \mathcal{U}$ transitif.

On considère l'application définie par la propriété de récurrence :

$$h : X \longrightarrow h[X]$$
$$x \longmapsto \{h(y) \mid y \in Pred_R(x)\}$$

On pose $Y := h[X]$ c'est un ensemble $\in \mathcal{U}$. (Ce n'est pas une instance de fondation car h est un élément de $\mathcal{U}$, par une classe fonctionnelle). Montrons que h est un isomorphisme de X dans Y, et que $(Y, \in)$ est transitif.

∘ h est un homomorphisme : par construction si ~~y~~ $y R x$ alors $y \in Pred\, x$ et donc $h(y) \in h(x)$.

∘ $(Y, \in)$ est transitif : $t \in h(x) \in Y$, ~~montrons~~ montrons que $t \in Y$

$t \in h(x) = \{h(y) \mid y \in Pred\, x\}$ donc il existe $z \in Pred(x)$ tq $t = h(z)$ donc $t \in Y$.

---

(1) ie $Pred\, x = Pred\, y \Longrightarrow x = y$.

• h est injective. (on utilise que R est extensionnelle).

$\forall t \in \mathrm{Pred}(x)$

Soit $x \in X$ fixé et on montre que $\left\{ y \in X \mid h(y) = h(x) \text{ et } x \neq y \right\} =$

Soit y_0 minimal dans cet ensemble on a donc $\forall z \in \mathrm{Pred}(y_0)$ (et $\forall t \in \mathrm{Pred}\, x$, $h(z) = h(t) \Rightarrow t = z$)

$h(z) = h(x) \Rightarrow z = x$. On suppose que

$h(y_0) = h(x)$ donc $\{ h(z) \mid z \in \mathrm{Pred}(y_0) \} = \{ h(z) \mid z \in \mathrm{Pred}(x) \}$

Soit $z \in \mathrm{Pred}(y_0)$ alors $h(z) \in h(y_0) = h(x)$.

donc $h(z) = h(t)$ pour $t \in \mathrm{Pred}\, x$ et par minimalité de y_0, cela implique $z = t$ donc $z \in \mathrm{Pred}\, x$ et donc $\mathrm{Pred}(y_0) \subseteq \mathrm{Pred}\, x$. De même $\mathrm{Pred}\, x \subseteq \mathrm{Pred}\, y_0$ et donc $\mathrm{Pred}(y_0) = \mathrm{Pred}(x)$ et par extensionnalité $y_0 = x$, ce qui contredit les hypothèses donc on a bien h injective.

• $h(y) \in h(x) \Rightarrow y R x$: Si $h(y) \in h(x)$, par définition de $h(x)$ il existe $t \in \mathrm{Pred}\, x$ tel que $h(y) = h(t)$ donc par injectivité de h, $y = t$ donc $y \in \mathrm{Pred}\, x$ donc $y R x$.

On a donc bien un isomorphisme entre (X, R) et $(Y, \in)$, cet ensemble $(Y, \in)$ est appelé <u>collapse de Mostowski</u>. (tout comme l'application h).

Méta - critère

On énonce dans cette section deux méta-critères pour une classe donnée pour déterminer si c'est un modèle interne de ZF. Se référer à la section "Absoluité" (p 51). Ce n'est rien d'autre que de généraliser ce qui a été fait "à la main" dans les sections de consistance relative.

Proposition : Soit $\mathbb{M}$ une classe transitive non vide.

1. EXT est absolu pour $\mathbb{M}$
2. PAIRE est absolu pour $\mathbb{M}$
   ssi $\forall x, y \in \mathbb{M} \quad \{x, y\} \in \mathbb{M}$
3. REUNION est absolu pour $\mathbb{M}$
   ssi $\forall x \in \mathbb{M} \quad \bigcup x \in \mathbb{M}$
4. PARTIES est absolu pour $\mathbb{M}$
   ssi $\forall x \in \mathbb{M} \quad (\mathcal{P}(x) \cap \mathbb{M}) \in \mathbb{M}$
5. INFINI est absolu pour $\mathbb{M}$
   ssi $\omega \in \mathbb{M}$
6. FONDATION est absolu pour $\mathbb{M}$

Preuve : Pour voir cela on se reporte aux sections précédentes :

1. est fait p 55, on peut aussi voir que avec p 52 que EXT est Π_1 donc "passe à la restriction".
2. 3. et 4. c'est exactement le critère d'absoluité p 54 car on a que les formules $z = \{x, y\}$, $y = \bigcup x$, $u \subseteq x$ sont Δ_0 il reste seulement à vérifier que $\mathbb{M}$ est stable par ces fonctionnelles.
5. $\boxed{\Leftarrow}$ est clair. $\boxed{\Rightarrow}$ vient du fait que comme $\mathbb{M}$ est transitive le ω calculé dans $\mathbb{M}$ est le "vrai" ω de $\mathbb{V}$.
6. Immédiat, le rang de fondation est absolu pour les classes transitives. (coïncide avec le rang de $\mathbb{V}$)

N.B : On rappelle ce que l'absoluité veut dire : Si ϕ un énoncé est absolu pour $\mathbb{M}$, alors cela veut dire que $\mathbb{V} \models \Phi^{\mathbb{M}}$ et donc que

$$(\mathbb{M}, \in_{\mathbb{M}}) \models \Phi$$

• Sur l'axiome de l'infini : Pour une certaine classe donnée X (non nécessairement transitive), il se peut que la construction de ω avec $u \mapsto u \cup \{u\}$ ne donne pas ω, par exemple en partant de $X = \{2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ et en clôturant par $u \mapsto u \cup \{u\}$ on obtient $\omega \setminus \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \omega \setminus 2$ qui vérifie bien INFINI mais ne contient pas ω. Si la classe est transitive on aura nécessairement ω.

• <u>Premier Méta-critère</u> :

Ce premier méta-critère est un critère pour qu'une classe donnée $\mathbb{M}$ (transitive) soit un modèle interne de ZF mais c'est en fait un peu plus, il permet de savoir si le fait d'être un modèle de ZF interne est prouvable dans ZF, puisque l'on a formalisé tout le premier ordre dans ZF.

<u>Théorème</u> (Méta-Critère)

Si ZF prouve :

- $\mathbb{M}$ est une classe transitive $\neq \emptyset$
- Pour chaque $\Theta(x, \bar{p})$: $\Theta^{(\mathbb{M})}[\mathbb{M}] \subseteq \mathbb{M}$ autre écriture de $\mathbb{V}$ $\Rightarrow \in \mathbb{M}$

"$\forall \bar{p} \in \mathbb{M}$, (la classe $\{x \in \mathbb{M} \mid \Theta^{(\mathbb{M})}(x, \bar{p})\}$ est un ensemble) (dans $\mathbb{V}$)
$\Rightarrow \{x \in \mathbb{M} \mid \Theta^{\mathbb{M}}(x, \bar{p})\} \in \mathbb{M}$"

Alors $(\mathbb{M}, \in_{\mathbb{M}})$ est un modèle interne de ZF et même $ZF \models \ulcorner(\mathbb{M}, \in_{\mathbb{M}}) \models ZF\urcorner$. On dit que $(\mathbb{M}, \in_{\mathbb{M}})$ est <u>prouvablement</u> un modèle interne de ZF.

NB : Tout ceci a bien du sens puisque l'on a internalisé la logique du premier ordre on peut donc tout autant que la montrer $(X, \in_X) \vdash \Phi$, exprimer qu'une classe est un modèle de ZF.

Preuve : On suppose les hypothèses.

Premièrement, $Ord \subseteq \mathbb{M}$, en effet $Ord^{\mathbb{M}} = Ord \cap \mathbb{M}$ est transitive (Ord est stable par les classes transitives). Si $Ord \cap \mathbb{M}$ était un ensemble ce serait un ordinal et $Ord^{\mathbb{M}} \in \mathbb{M}$ par hypothèse. Comme $Ord^{\mathbb{M}}$ est un ordinal, $Ord^{\mathbb{M}} \in Ord$ donc $Ord^{\mathbb{M}} \in Ord \cap \mathbb{M} = Ord^{\mathbb{M}}$ absurde.

On a donc bien que $Ord \subseteq \mathbb{M}$.

On sait par la proposition du début que EXT et FON sont vérifiés.

De plus pour $x, y \in \mathbb{M}$, $\{x, y\}$ est un ensemble, $\bigcup x$ aussi donc toujours par la proposition p 93 PAIRE et REUNION sont vérifiés.

Comme $Ord \subseteq \mathbb{M}$, $\omega \in \mathbb{M}$ donc INFINI est vérifié.

PARTIES est vérifié car pour $a \in \mathbb{M}$, $\{x \in \mathbb{M} \mid (x \subseteq a)^{\mathbb{M}}\}$ est un ensemble et c'est $\mathcal{P}(a) \cap \mathbb{M}$.

Il ne reste qu'à vérifier REM :

Soit $\varphi(x, y, \bar{p})$ une formule et $\bar{p}, a \in \mathbb{M}$ tels que

$$\mathbb{V} \models \forall x \in a \ \exists ! y \ \varphi(x, y, \bar{p}).$$

On pose $\varphi^*(x, y, \bar{p}) = \varphi^{\mathbb{M}}(x, y, \bar{p}) \wedge x \in \mathbb{M} \wedge y \in \mathbb{M}$

Dans $\mathbb{V}$ on a $\forall x \in a \ \exists ! y \ \varphi^*(x, y, \bar{p})$ et donc φ^* est une fonctionnelle en x sur $a \in \mathbb{M}$. Il s'agit de vérifier que l'image (directe) de a est bien un ensemble

Or par remplacement dans $\mathbb{V}$ $\{y \mid \exists x^{\in a} \varphi^*(x, y, \bar{p})\}$ est un ensemble (on utilise REM(φ^*)) (c'est l'image directe) et par les hypothèses sur $\mathbb{M}$, il est dans $\mathbb{M}$ et on a donc bien $(\text{REM } \varphi)^{\mathbb{M}}$ ∎

• Un deuxième méta-critère :

Théorème (Méta-critère 2) :

On suppose que $\mathbb{F} : \mathrm{Ord} \to \mathbb{V}$ est une fonctionnelle croissante continue. Autrement dit on se donne une hiérarchie continue d'ensembles $(\mathbb{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$. Soit $\mathbb{F}_\infty = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} \mathbb{F}_\alpha$

Si $\mathbb{F}_\infty$ est transitive et $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}$ $\mathrm{Def}(\mathbb{F}_\alpha) \subseteq \mathbb{F}_\infty$ (cf p 99)

alors $\mathbb{F}_\infty$ est un modèle interne de ZF.

Preuve : On montre que $\mathbb{F}_\infty$ satisfait les hypothèses du critère précédent.

$\mathbb{F}_\infty$ est transitive par hypothèse.

Soit θ une formule et $\bar{p} \in \mathbb{F}_\infty$ tq

$$E_{\theta p} = \{x \in \mathbb{F}_\infty \mid \theta^{(\mathbb{F}_\infty)}(x, \bar{p})\} \text{ est un ensemble.}$$

Alors $E_{\theta p} \subseteq \mathbb{F}_\alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathrm{Ord}$. C'est donc car $E_{\theta p}$ est un ensemble d'éléments de $\mathbb{F}_\infty$ il ne peut être cofinal dans $\mathbb{F}_\infty$.

. . On veut $E_{\theta p} \in \mathbb{F}_\infty$ pour appliquer le critère précédent

Par le schéma de réflexion (cf p 73) dans la hiérarchie $(\mathbb{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$ les $\beta \in \mathrm{Ord}$ tels que $\theta^{(\mathbb{F}_\infty)}$ est absolue pour $\mathbb{F}_\beta$ est une classe cofinale, il existe donc un $\beta > \alpha$ tel que

$$\mathbb{V} \models \forall x \in \mathbb{F}_\beta \ [\theta^{\mathbb{F}_\beta}(x, \bar{p}) \text{ ssi } \theta^{\mathbb{F}_\infty}(x, \bar{p})]$$

On a donc que $E_{\theta p} = \{x \in \underline{\mathbb{F}_\beta} \mid \theta^{(\mathbb{F}_\beta)}(x, p)\}$

i.e. $E_{\theta p} = \{x \in \mathbb{F}_\beta \mid (\mathbb{F}_\beta, \in_{\restriction \mathbb{F}_\beta}) \models \theta(x, p)\} \left(= {}^{\mathbb{F}_\beta}\theta[\mathbb{F}_\beta, \bar{p}]\right)$

$\left(= \{x \in \mathbb{F}_\beta \mid \mathbb{L}_\beta \models \ulcorner \theta(x, p) \urcorner\}\right)$ (même notations pour les mêmes choses)

On a donc que $E_{\Theta_P} \in \mathrm{Def}(\mathbb{F}_\beta) \subseteq \mathbb{F}_\infty$ et on conclut donc que $E_{\Theta_P} \in \mathbb{F}_\infty$ et le premier méta-critère permet de conclure. ☒

N.B: On voit comment le schéma de réflexion intervient ici : comme on a affaire à une hiérarchie continue, un ensemble défini par une formule (définissable dans la hiérarchie totale $\mathbb{V}_\infty$) peut en fait "refléter" dans un élément de la hiérarchie de façon à ce que l'ensemble a priori définissable dans $\mathbb{F}_\infty$ est définissable dans un certain $\mathbb{F}_\beta$ et les hypothèses permettent de conclure.

N.B: En revenant sur le premier méta-critère il s'agit en fait de vérifier qu'une classe transitive est "close par ensemble définissable". Il est ensuite intuitif qu'en langage du premier ordre, cela suffise pour vérifier une axiomatique du premier ordre donnée dans $\mathcal{L}_{\in}$.

N.B: D'un point de vue pragmatique :

Le critère précédent s'adapte pour toute classe transitive donnée, $\mathbb{M}$, on pose $\mathbb{M}_\alpha := \mathbb{M} \cap \mathbb{V}_\alpha$, i.e on "découpe" $\mathbb{M}$ selon le rang on a alors une hiérarchie continue $(\mathbb{M}_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ de réunion $\mathbb{M}$.

Le méta-critère 2 est alors : $\forall \alpha \in Ord \ \mathrm{Def}(\mathbb{M} \cap \mathbb{V}_\alpha) \subseteq \mathbb{M}$.

Ainsi, *prouver* que "$\mathbb{M}$ est un modèle interne de ZF"

s'énonce : "$\mathbb{M}$ est transitive & $\forall \alpha \in Ord \ \mathrm{Def}(\mathbb{M} \cap \mathbb{V}_\alpha) \subseteq \mathbb{M}$"

c'est un énoncé unique. On conclut donc qu'*un seul énoncé suffit pour prouver (dans ZF) qu'une classe donnée $\mathbb{M}$ est un modèle de ZF (interne)*. Il ne faut bien sûr pas en conclure que ZF est finiment axiomatisable.

Parties définissables

L'objet de cette section est l'introduction de la fonctionnelle $Def(x) : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ qui associe à chaque élément de l'univers modèle ZF^0 (on pose $ZF^0 = ZF \setminus \{\text{parties}\}$) l'ensemble de ses parties définissables. L'idée est de pouvoir ensuite définir l'univers constructible de Gödel $\mathbb{L}$ comme hiérarchie union des $\mathbb{L}_\alpha$ avec $\mathbb{L}_{\alpha+1} = \{$ parties définissables de $\mathbb{L}_\alpha \}$.

On entend par partie définissable de $x \in \mathbb{V}$ l'ensemble des ensembles définissables au sens de la théorie des modèles en logique du premier ordre. On prend $\varphi \in \mathcal{L}_{ens} \cup x$ (formule à paramètres dans x) et alors φ définit un ensemble :

$$E_{x,\varphi,\bar{s}} := \{ y \in x \mid \underset{\varphi(y,s)}{\varphi(y)} \dashv (x, \in_{|x \times x}) \}_{s \in x^n} = \varphi^{(x,\in)}[(x,\in)]$$

Il s'agit de montrer que la fonctionnelle

$$X \longmapsto Def(X) = \{ E_{X,\varphi,s} \mid \varphi \in \underset{s \in n}{Fo\mathcal{L}_x} \}$$

est Σ^{ZF_0} (ZF_0 - équivalente à une formule Σ).

Rappel : Σ contient Δ_0, close par $\wedge, \vee$ (pas $\neg$), close par $\exists$ et close par $\forall$ borné. (cas $2 \Rightarrow \Sigma_1$).

On comprend donc qu'il s'agit de coder la satisfaisabilité dans le modèle comme on l'a déjà fait dans PA.

En fait ici deux approches sont possibles.

- Codage des formules

La première solution consiste à coder dans $\mathbb{V}$ l'ensemble des formules de la même manière que l'on code les formules [illegible]

En fait, comme tout modèle de ZF est aussi un modèle de PA on peut utiliser l'exacte même codage. Mais on peut aussi en considérer d'autres ou l'on envoie par exemple

$$\ulcorner v_i \doteq v_j \urcorner := \langle 0, i, j \rangle^{ck} \text{(le triplet)}$$

En fait peu importe, dans ZF le codage s'avère être beaucoup plus simple et large. On peut avoir au bout d'un moment des ensembles Δ^{ZF_0} de code de formule $\ulcorner For_{\mathcal{L}} \urcorner \in \mathbb{V}$, de symbole $\ulcorner Symb_{\mathcal{L}} \urcorner \in \mathbb{V}$, $\ulcorner Enon_{\mathcal{L}} \urcorner \in \mathbb{V}$ (énoncés). On peut même disposer (cf Drake p 91) d'une formule

$$Constr(u, s, n) \quad \Delta^{ZF_0}$$

qui dit que s est une fonction décrivant la construction hiérarchique de (en n étapes) $u = \ulcorner \varphi \urcorner \in \ulcorner For_{\mathcal{L}} \urcorner$.

Il est alors possible d'obtenir une formule $Sat(u, A, b)$ Σ^{ZF_0} tq $\mathbb{V} \models Sat(\ulcorner \phi \urcorner, A, b)$ ssi $(A, \in_{|A \times A}) \models \phi[b]$.

Si l'on confond $\phi \in \mathcal{L}$ avec $\ulcorner \phi \urcorner \in \mathcal{U}$ il est alors clair que la formule $Sat(a, b, c)$ que l'on notera dorénavant $(a, \in_{|a \times a}) \models b[c]$ est une formule Σ^{ZF_0}.

On peut alors définir

$$E_{X, \varphi, s} = \{u \in X \mid (X, \in_{X \times X}) \models \varphi[u, s]\}$$

dans ZF_0 et dans $X \mapsto Def(X)$ est Σ^{ZF_0}.

- Une approche non codage

L'approche suivante qui est décrite dans Kunen (p 153) est la suivante : On veut définir les parties définissables d'un $x \in V$. Mais un ensemble définissable en premier ordre de x^n n'est autre qu'un certain $\varphi(x_1 \dots x_n)[x^n]$ donc l'ensemble des parties définissables de x^n peut être vu comme le plus petit ensemble contenant les relations $y = z$, $y \in z$ et stable par complémentation (dans x), intersection et projection. On peut donc définir $Df(x, n)$ puis $Df(x) = \bigcup_{n \in \omega} Df(x, n)$. Il est alors simple de montrer qu'à un ensemble défini de cette façon correspond une et une seule (à ZF_0 équivalence près) formule φ (à paramètres dans x) qui le définit.

L'univers constructible II

On dispose alors (selon Partie définissable (p 99)) d'une fonctionnelle totale $\mathrm{Def} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ Σ^{ZF_0} qui à x associe l'ensemble (dénombrable) de ses parties définissables. On a les propriétés suivantes :

Propriétés :

- $\mathrm{Def}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}_{\text{fini}}(x) \subseteq \mathrm{Def}(x)$.
  en particulier si $x \in V_\omega$, $\mathrm{Def}(x) = \mathcal{P}(x)$.
- Si x est transitif, $x \subseteq \mathrm{Def}(x)$.
- Si x est transitif, $\mathrm{Def}(x)$ est transitif

Preuve : . Une partie finie $\{x_1 \dots x_n\} \subseteq x$ est définie par la formule
$$\bigvee_{i=1}^{n} y \doteq x_i$$

. Soit $y \in x$ montrons que $y = \varphi[(x, \in_x)]$ pour φ à paramètre dans x. On a
$$y = \{z \mid z \in y\} \overset{\text{trans}}{=} \{z \in x \mid z \in y\} = \varphi[(x, \in_x)]$$
avec $\varphi(u) = u \in y$ (paramètre). donc $y \in \mathrm{Def}(x)$.

. Soit $y \in \mathrm{Def}(x)$, on a $y \subseteq x$ donc si $z \in y$, $z \in x$ et par le nœud pour $z \in \mathrm{Def}\,x$. ☐

NB. Si X est infini, $|X| = |\mathrm{Def}(X)|$. (Il y a autant d'ensembles définissables que de formules à paramètres dans X).

· <u>Définition des $\mathbb{L}_\alpha$:</u>

La hiérarchie $(\mathbb{L}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$ se définit par induction transfinie :

$\cdot \ \mathbb{L}_0 = \emptyset$

$\cdot \ \mathbb{L}_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(\mathbb{L}_\alpha)$

$\cdot \ \mathbb{L}_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \mathbb{L}_\beta$

On construit ainsi des ensembles $(\mathbb{L}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$ ainsi qu'une classe

$\mathbb{L} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} \mathbb{L}_\alpha$ qui est propre.

· <u>Propriétés des $\mathbb{L}_\alpha$:</u>

Proposition :

1. $\mathbb{L}_\alpha$ sont transitifs.
2. $\xi \longmapsto \mathbb{L}_\xi$ est croissante et continue. $(\mathbb{L}_\alpha)$ est donc une hiérarchie continue d'ensembles.
3. $\forall \alpha \in \mathrm{On} \quad \mathbb{L}_\alpha \cap \mathrm{Ord} = \alpha$
4. (AC) $\overline{\overline{\mathbb{L}_\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}}$
5. $\mathbb{L}$ est une classe transitive
6. $\mathrm{Ord} \subseteq \mathbb{L}$ ($\mathbb{L}$ est une classe propre)
7. $\mathbb{L}_\alpha \in \mathbb{L} \quad \forall \alpha \in \mathrm{On}$

<u>Preuve</u> : 1. C'est immédiat par induction transfinie par la proposition précédente x transitif $\Rightarrow \mathrm{Def}(x)$ transitif, et $\emptyset$ est transitif et une union croissante d'ensemble transitif est transitive.
2. Par la proposition précédente $x \subseteq \mathrm{Def}(x)$ pour x transitif donc par induction on montre que $\mathbb{L}_\alpha \subseteq \mathbb{L}_{\alpha+1}$. Elle est continue par construction.
3. On le montre par induction, supposons que $\mathbb{L}_\alpha \cap \mathrm{Ord} = \alpha$. On rappelle que $\mathrm{Ord}(x)$ est une formule Δ_0 qui est donc
... classe transitive

On a donc $\alpha = \{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \beta < \alpha\}$

$$\overset{HI}{=} \{\beta \in \mathbb{L}_\alpha \mid \mathbb{V} \models \mathrm{Ord}(\beta)\}$$

absoluité de Ord

$$= \{\beta \in \mathbb{L}_\alpha \mid \mathbb{L}_\alpha \models \mathrm{Ord}(\beta)\}$$

$$= \{\beta \in \mathbb{L}_\alpha \mid \ulcorner \mathbb{L}_\alpha \models \mathrm{Ord}(\beta) \urcorner \dashv \mathbb{V}\}$$

Donc $\alpha \in \mathrm{Def}(\mathbb{L}_\alpha) = \mathbb{L}_{\alpha+1}$ et comme $\alpha \subseteq \mathbb{L}_\alpha \in \mathbb{L}_{\alpha+1}$ (ie $\{\alpha\} \subseteq \mathbb{L}_{\alpha+1}$)
on a donc par stabilité par union (disjonction) $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha+1 \subseteq \mathbb{L}_{\alpha+1}$.
En utilisant le rang de fondation on montre que $\mathbb{L}_{\alpha+1} \cap \mathrm{Ord} \subseteq \alpha+1$.

5. La transitivité se conserve par union de chaînes.

6. En utilisant 3.

7. On a même mieux : $x \in \mathrm{Def}(x)$ pour x transitif donc
$\mathbb{L}_\alpha \in \mathbb{L}_{\alpha+1}$ donc $\mathbb{L}_\alpha \in \mathbb{L}$.

4. Par induction transfinie en utilisant les NB précédents. ∎

NB : On remarque que pour $n \in \omega$ $\mathbb{L}_n = \mathbb{V}_n$ de plus
$\mathbb{L}_\omega = \mathbb{V}_\omega$.

• Classe de complexité de $\mathbb{L}_\alpha$

On rappelle le fait suivant qui est une conséquence de la preuve de la définition par induction transfinie.
Rappel : Dans la définition par induction transfinie, si la fonctelle (valable) G est Σ^{ZF_0} alors F est Σ^{ZF_0}.

On a vu que Def était une fonctionnelle Σ^{ZF_0} on voit très bien comment construire G de façon Σ^{ZF_0} avec

$$G(x) = \mathrm{Def}(F|_x) \text{ si } F|_x \text{ successeur et } \bigcup \text{ si } F|_x \text{ limite}$$

et obtenir G Σ^{ZF_0}. On a donc montré le théorème suivant :

__Théorème :__ La fonctionnelle $\xi \longmapsto \mathbb{L}_\xi$ est Σ^{ZF_0}

__Remarque :__ Les classes de formules Δ_0, Σ, Π, Δ etc., on utilise ces même dénominations pour les "ensembles de gödels" ie codes de formule, intérieurs à $\mathbb{W}$.

Consistance relative de ZF + AC + HGC.

On montre dans cette section que la classe $\mathbb{L}$ (cf "L'univers constructible $\mathbb{L}$" p 103) dans un modèle $\mathbb{V}$ de ZF est un modèle de ZF + AC + HGC. Tout d'abord, en utilisant le méta critère 2 p 96 on a directement que $\mathbb{L} \models ZF$. On montre à présent que $\mathbb{L} \models AC$ d'abord puis que $\mathbb{L} \models HGC$.

On va pour cela avoir besoin d'une propriété essentielle de l'univers constructible :

• $\mathbb{L} \models \mathbb{V} = \mathbb{L}$

L'énoncé en dessous est "$\forall x\, (x \in \mathbb{L})$" ou en cas "$\forall x\, \exists \alpha \in Ord\, (x \in \mathbb{L}_\alpha)$"
Le fait qu'il soit une classe $\mathbb{L}$ dit que si l'on refait la construction de $\mathbb{L}$ à l'intérieur de $\mathbb{L}$ on tombe sur l'univers tout entier.

Remarque: On suppose que $\Theta(x, y)$ définit une fonctionnelle $\mathbb{F}$ partielle et Σ et que $\mathbb{M}$ est une classe transitive.

On peut alors restreindre $\mathbb{F}$ à $\mathbb{M}$:

$\Theta^{\mathbb{M}}(x, y) \wedge x \in \mathbb{M} \wedge y \in \mathbb{M}$ est une fonctionnelle partielle $\mathbb{F}^{\mathbb{M}}$

de plus $\mathrm{Dom}\, \mathbb{F}^{\mathbb{M}} \subseteq \mathrm{Dom}\, \mathbb{F}$ et $\mathrm{Dom}\, \mathbb{F}^{\mathbb{M}} \subseteq \mathbb{M}$

et pour $x \in \mathrm{Dom}\, \mathbb{F}^{\mathbb{M}}$, $\mathbb{F}^{\mathbb{M}}(x) = \mathbb{F}(x)$.

On conclut que les fonctionnelles partielles Σ admettent des restrictions à toute classe transitive. (Restriction dans le sens où les fonctions $\mathbb{F}^{\mathbb{M}}$ et $\mathbb{F}$ coïncident sur $\mathrm{Dom}\, \mathbb{F}^{\mathbb{M}}$).

C'est une conséquence de l'absoluité ascendante des formules Σ.
(la partie Δ_0 est absolue par transitivité de $\mathbb{M}$ et la partie existentielle par "sur structure").

On dispose donc de la fonctionnelle Σ $\Lambda(x, y)$ définissant $\xi \mapsto \mathbb{L}_\xi$, donc $\mathbb{V} \models \Lambda(\xi, \mathbb{L}_\xi)$ $\forall \xi \in \mathrm{Ord}$. Par la remarque précédente $\Lambda^{\mathbb{L}}$ est la relativisée à $\mathbb{L}$, on a que $\Lambda^{\mathbb{L}}$ est une classe fonctionnelle $\mathbb{L} \to \mathbb{L}$ et par absoluité $\mathbb{V} \models \Lambda^{\mathbb{L}} \leftrightarrow \Lambda$ ie $\Lambda^{\mathbb{L}}(\xi, \mathbb{L}_\xi) \leftrightarrow \Lambda(\xi, \mathbb{L}_\xi)$ donc $\mathbb{L}_\xi^{\mathbb{L}} = \mathbb{L}_\xi$ et d'autre terme $\mathbb{L} \models \forall x\ \exists \xi \in \mathrm{Ord}\ (x \in \mathbb{L}_\xi)$. On rappelle que $\mathrm{Ord}^{\mathbb{L}} = \mathrm{Ord}$. ■

On a donc montré que :

<u>Théorème</u> : $\mathbb{L} \models \mathbb{V} = \mathbb{L}$.

<u>Note</u> : En particulier $ZF + \mathbb{V} = \mathbb{L}$ est consistant. On peut montrer que $ZF + \neg \mathbb{V} = \mathbb{L}$ est aussi consistante.

- <u>L'axiome du choix dans $\mathbb{L}$</u> :

On va montrer dans cette section que $ZF \models \mathbb{V} = \mathbb{L} \to AC$.

Pour ce faire on va avoir besoin d'un lemme :

<u>Lemme</u> : Il existe une fonctionnelle $\mathbb{B}$ telle que si $(X, <_X)$ est bien ordonné alors

- $\mathbb{B}(<_X)$ est un bon ordre sur $\mathrm{Def}(X)$
- si $X \subseteq \mathrm{Def}(X)$ alors $(\mathrm{Def}(X), \mathbb{B}(<_X))$ est une extension finale de $(X, <_X)$.

<u>Preuve</u> : On sait que $\mathrm{Def}(X) = \{ E_{X,\varphi,s} \mid (\varphi, s) \in \mathrm{Fml}_\chi \times \cup X^{n+1} \}$

On peut aisément bien ordonner Fml_χ, (on peut par exemple voir Fml_χ comme l'ensemble des codes de formules dans ω et prendre l'ordre de leur code.) que l'on note $<_\chi$. Ensuite, on peut ordonner $\cup X^n$ à partir du

(en mettant par exemple tous n uplet plus petit que $n+1$ uplet).
On en déduit ensuite un bon ordre de $\mathrm{Fml}_\chi \times \mathrm{Seq}\, X^n$ puis avec la surjection $(\varphi, \bar{s}) \longmapsto E_{X\varphi s}$ un bon ordre de $\mathrm{Def}(X)$ ∎

Avec ce simple lemme on déduit :

<u>Théorème:</u> $ZF \vdash \mathbb{V} = \mathbb{L} \longrightarrow AC$

<u>Preuve:</u> On donne un bon ordre des $\mathbb{L}_\alpha$ par récurrence

- $<_{\mathbb{L}_0} = \emptyset$
- $<_{\mathbb{L}_{\alpha+1}} = \mathbb{B}(<_{\mathbb{L}_\alpha})$
- $<_{\mathbb{L}_\lambda} = \bigcup_{\xi<\lambda} <_{\mathbb{L}_\xi}$ λ limite.

Pour tout α, $<_{\mathbb{L}_\alpha}$ est un bon ordre sur $\mathbb{L}_\alpha$ et on a que le cas limite utilise que on a une extension fournie dans le lemme.
Supposons $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ pour x qcq il existe $\alpha \in \mathrm{Ord}$ tq $x \subseteq \mathbb{L}_\alpha$ et le bon ordre sur $\mathbb{L}_\alpha$ induit un bon ordre sur x donc tout ensemble admet un bon ordre, on a AC ∎

<u>Remarque:</u> (Axiome du choix global) La relation

$$<_{\mathbb{L}} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} <_{\mathbb{L}_\alpha}$$

est un bon ordre sur $\mathbb{L}$ et donne si $\mathbb{L} = \mathbb{V}$ sur tout l'univers. On a donc une relation dont les $\mathbb{L}_\alpha$ sont des segments initiaux. On appelle cette forme forte de AC <u>l'axiome du choix global</u>. On représente ainsi l'univers plus comme $\mathbb{V}$ mais comme $\Big|^{\mathbb{L}_{\alpha+1}}_{\mathbb{L}_\alpha}$ puisqu'il est bien ordonnable. Cet axiome du choix peut s'énoncer ainsi :

" il existe $\mathbb{F} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ telle que
$\forall x \; (x \neq \emptyset \rightarrow \mathbb{F}(x) \in x)$ "

Notez qu'il est nécessaire que le bon ordre soit "ensembliste" i.e que les segments initiaux soit des ensembles dans la définition de ACG.

Remarque: On peut montrer que $<_{\mathbb{L}}$ est une relation Σ_1^{ZF} sur $\mathbb{L}$. Donc si $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ on a donc un bon ordre défini par une relation Σ_1 sur l'univers et donc en particulier sur $\mathbb{R}$.

• L'HGC dans $\mathbb{L}$

On rappelle que HGC est l'énoncé suivant

$$\text{"} \forall \kappa \in \mathrm{Card}^\infty \quad \kappa^+ = 2^\kappa \text{"}$$

On rappelle qu'un ensemble muni d'une relation binaire $(X, <)$ est <u>extensionnelle</u> si $\forall a, b \in X$ $\{x \in X, x < a\} = \{x \in X, x < b\} \Rightarrow a = b$. (c'est exactement vérifier l'axiome d'extensionnalité).

On se réfère à "<u>Ordre bien fondé et récursion : Collapse de Mostowski</u>" (p 87)

pour le résultat qui suit :

<u>Lemme</u> (collapse de Mostowski)

Soit $\mathcal{A} = (A, \triangleleft)$ une structure bien fondée et extensionnelle. Alors il existe un unique isomorphisme $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow (U, \in_U)$ où $U \in \mathbb{V}$ est un ensemble transitif.

<u>Corollaire :</u> Si $(S, \in)$ est extensionnelle il existe un unique ensemble U tel que $\pi : (S, \in) \cong (U, \in)$ de plus si $T \subseteq S$ est un <u>ensemble transitif</u> $\pi_{|T} = \mathrm{Id}_T$.

<u>Preuve :</u> Pour $h \in T$, $\pi(h) = \{\pi(x), x \in S \text{ et } x \in h\}$
$$\overset{\text{transitivité}}{=} \{\pi(x), x \in h\}$$

On montre par récurrence bien ordonnée ($\in$-ind) que $\pi(h) = h$

Proposition : Soit U un ensemble transitif tel que $U \models V = L$

$\boxed{\text{Alors } U \text{ est un } L_\alpha \text{ avec } \alpha = \underline{Ord \cap U}\text{.}}$ (et α limite)

Preuve : Soit $\alpha = Ord \cap U$ et soit $x \in U$. On montre qu'il existe un $\xi < \alpha$ $\xi \in Ord$ tel que $x \in L_\xi$. On aura donc que $U = \bigcup_{\xi < \alpha} L_\xi$ et la proposition. On a que $U \models V = L$

donc il existe $\xi, y \in U$ tels que $U \models \Lambda(\xi, y) \wedge x \in y$

Autrement dit il existe $\xi^{(U)}$ et $L_\xi^{(U)} \in U$ tels que $x \in L_\xi^{(U)}$

Par absoluité - ascendante des formules Σ, comme $U \subseteq V$ on a que $L_\xi^{(U)} = L_\xi$, $\xi^U = \xi$ (car ξ est bien un ordinal)

en prenant $\xi < \alpha$, on a donc bien la proposition. ⊠

Théorème : On suppose $V = L$. Pour tout cardinal infini κ

$$\mathcal{P}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$$

Preuve : On montre que pour $X \subseteq \kappa$ il existe $\xi < \kappa^+$ tel que $X \in L_\xi$. Soit donc $X \subseteq \kappa$ et posons $T = \kappa \cup \{X\}$ (T transitif)

En utilisant le schéma de réflexion sur la formule $V = L$ on peut trouver des $\alpha \in Ord$ arbitrairement grand tels que $L_\alpha \models V = L$

Soit donc $\alpha \in Ord$ tel que $T \subseteq L_\alpha$ et $L_\alpha \models V = L$.

Par Löwenheim - Skolem descendant on peut trouver une sous structure élémentaire $(A, \in) \preceq (L_\alpha, \in)$ telle que $T \subseteq A$ et $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{T}} = \kappa$. Comme c'est une sous structure élémentaire et que $(L_\alpha, \in)$ est extensionnelle, $(A, \in)$ est extensionnelle et donc par le lemme de Mostowski il existe U transitif tel que

$$\pi : A \cong U \quad \text{un isomorphisme.}$$

Comme $T \subseteq A$ est transitif, par le corollaire p 110 π est l'identité sur T et donc $\pi(X) = X$ et donc $X \in U$. De plus comme $L_\alpha \models V = L$, on a $A \models V = L$ et $U \models V = L$

Enfin par la proposition précédente $U = \mathbb{L}_\nu$ avec $\nu = \mathrm{Ord} \cap U$

Notons que $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{A}} = \kappa$ donc $\overline{\overline{\nu}} = \kappa$ et donc $\nu < \kappa^+$, $X \in L_\nu \in \mathbb{L}_{\kappa^+}$ ∎

NB : On a pris $(A, \in) \preceq (\mathbb{L}_\alpha, \in)$ et $(\mathbb{L}_\alpha, \in)$ est transitif, alors pourquoi A n'est-il pas transitif ? tout simplement parce que l'on ne peut pas exprimer dans $\mathbb{L}_\alpha$ que $\mathbb{L}_\alpha$ est un ensemble transitif car cela traduit que $\mathbb{L}_\alpha$ est transitif dans $\mathbb{V}$: $\forall x \in \mathbb{L}_\alpha, \forall y \in \mathbb{V}\ y \in x \Rightarrow y \in \mathbb{L}_\alpha$

Théorème : On a $ZF \vdash (\mathbb{V} = \mathbb{L}) \Rightarrow HGC$

Preuve : Par le théorème précédent, sous l'hypothèse $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ pour κ infini on a $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathbb{L}_{\kappa^+}$ donc
$$2^\kappa = \overline{\overline{\mathcal{P}(\kappa)}} \leq \overline{\overline{\mathbb{L}_{\kappa^+}}} = \kappa^+ \text{ donc } 2^\kappa = \kappa^+$$ ∎

Théorème : Si ZF est consistant alors $ZF + HGC + AC$ est consistant.

Ce résultat de consistance relative est très en faveur de l'acceptance de AC et HGC dans le sens suivant : l'univers constructible $\mathbb{L}$ est par définition une hiérarchie dans laquelle les ensembles définissables le sont dans la logique du premier ordre donc c'est un modèle de ZF très raisonnable en un sens, on ne s'autorise que peu d'excentricité quant aux ensembles définissables. Le fait que AC et HGC soient vrais dans $\mathbb{L}$ est très réconfortant quant à l'acceptation de ces axiomes.

Un peu plus sur $\mathbb{L}$

On étudie dans cette section un peu plus à propos de $\mathbb{L}$. D'abord une caractérisation minimale en tant que modèle, puis des généralisations de la construction des constructibles.

• Minimalité de $\mathbb{L}$

$\mathbb{L}$ est un modèle "minimal" dans le sens suivant :

Théorème : Soit $\mathbb{K}$ un modèle interne de ZF, alors $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$.
(et même $ZF \vdash (\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K})$)

Preuve : On a nécessairement que $\mathbb{K} \models \exists y\, \Delta(\alpha, y)$ pour tout α donc on a $\mathbb{L}_\alpha^{(\mathbb{K})} \in \mathbb{K}$ existe. Or $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{V}$ et Δ est une formule Σ donc absolue et donc $\mathbb{L}_\alpha^{(\mathbb{K})} = \mathbb{L}_\alpha^{(\mathbb{V})} = \mathbb{L}_\alpha$ et ce $\forall \alpha \in Ord$ donc $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$. ∎

Ce théorème n'est donc que juste une conséquence du fait que $\alpha \longmapsto \mathbb{L}_\alpha$ est une formule Σ. Le corollaire suivant nous donne une conséquence fondamentale et historique.

Corollaire : Si ZF est consistante il n'y a pas de classe $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{V}$ qui soit, prouvablement dans ZF, un modèle interne de $ZF + \neg AC$.

Preuve : Supposons le contraire, i.e. $\mathbb{K} \models ZF$ et $\mathbb{K} \models \neg AC$. Donc $ZF \vdash (\mathbb{K} \models \neg AC)$ autrement dit $\mathbb{V} \models \ulcorner(\mathbb{K} \models \neg AC)\urcorner$ mais alors
$ZF + \mathbb{L} = \mathbb{V} \vdash \ulcorner(\mathbb{K} \models \neg AC)\urcorner$ mais par le théorème précédent
$ZF + \mathbb{L} = \mathbb{V} \vdash \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$, donc $ZF + \mathbb{V} = \mathbb{L} \vdash \mathbb{L} = \mathbb{V} = \mathbb{K}$
donc $ZF + \mathbb{V} = \mathbb{L} \vdash \neg AC$ ce qui est une contradiction ∎

Ce fait essentiel nous dit qu'il n'y a pas de modèle interne pour $ZF + \neg AC$. En revanche on a vu un modèle interne de $ZF^- + \neg AC$ (p65) mais cela ne veut pas dire que c'est un modèle de ZF et en effet ce modèle vérifiait $\neg AF$

On peut aussi montrer qu'il existe un modèle de ZF + axiome supplémentaire + ¬AC, mais ce n'est toujours pas ce que l'on veut.

Généralisation de la constructibilité

On introduit ici deux constructions inspirées du modèle $\mathbb{L}$, les modèles $\mathbb{L}(X)$ et $\mathbb{L}[X]$ pour $X \in \mathbb{V}$.

La première construction $\mathbb{L}(X)$ est le "plus petit modèle interne contenant X" alors que dans $\mathbb{L}[X]$ la notion de constructibilité change en fonction de X.

Minimalisation du modèle.

Pour un ensemble transitif X, on définit :

$$\mathbb{L}_0(X) = X \qquad \mathbb{L}_{\alpha+1}(X) = \mathrm{Def}(\mathbb{L}_\alpha(X)) \qquad \mathbb{L}_\lambda(X) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbb{L}_\alpha(X)$$

On pose ensuite $\mathbb{L}(X) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} \mathbb{L}_\alpha(X)$.

On se contentera d'énoncer les propriétés de $\mathbb{L}(X)$, la plupart des choses se démontrent de la même manière que dans $\mathbb{L}$.

Proposition : • $\forall \xi \in \mathrm{Ord}$ $\mathbb{L}_\xi(X)$ est transitif (pour X transitif)

• $\xi \longmapsto \mathbb{L}_\xi(X)$ est une fonctionnelle croissante et continue.

• $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}$ $\alpha \subseteq \mathbb{L}_\alpha(X)$.

Remarque : Il suit de cela que $\mathbb{L}(X)$ est une classe contenant Ord, donc propre, transitive et avec $X \in \mathbb{L}(X)$.

En utilisant le méta-critère 2 p 96 on a que

Théorème : Si X est transitif, $\mathbb{L}(X) \models ZF$, de plus $\mathbb{L}(X)$ est le plus petit modèle interne contenant X.

La preuve de la deuxième partie se fait de la même manière que pour $\mathbb{L}$, par absoluité ascendante de Δ.

N. B : Même si $\mathbb{V} \models AC$, on a pas nécessairement $\mathbb{L}(X) \models AC$

Proposition : Il existe une fonctionnelle surjective :

$$G : Ord \times X^{<\omega} \twoheadrightarrow \mathbb{L}(X)$$

définissable dans $\mathbb{L}(X)$ avec unique paramètre X

N.B. : Même si AC n'est pas toujours vrai, si on considère $\mathbb{R} = P(\omega)$, $V \models AC_\omega \Rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}) \models AC_\omega$.

- Constructibilité relative

Pour $P \in V$ on dispose de $Def_P(X)$ les ensembles définissables dans le langage $\{\in\}$ augmenté d'un prédicat pour P.

Définition : Pour $P \in V$:

$$\mathbb{L}_0[P] = \emptyset \qquad \mathbb{L}_{\alpha+1}[P] = Def_{P\cap \mathbb{L}_\alpha[P]}(\mathbb{L}_\alpha[P])$$

$$\mathbb{L}_\lambda[P] = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbb{L}_\xi[P] \quad (\lambda \text{ limite}).$$

On peut ensuite $\mathbb{L}[P] := \bigcup_{\alpha\in Ord} \mathbb{L}_\alpha[P]$

Proposition :

(1) $\mathbb{L}_\alpha[P]$ sont transitifs, $\xi \mapsto \mathbb{L}_\xi[P]$ est croissante et continue et $Ord \subseteq \mathbb{L}[P]$.

(2) $P\cap \mathbb{L}_\xi[P] \in \mathbb{L}[P]$

(3) $\mathbb{L}[P] = \mathbb{L}[P\cap \mathbb{L}[P]]$

Preuve : (1) vérification.

(2) On pose $\bar P = P \cap \mathbb{L}[P]$, il existe α tq $\bar P \subseteq \mathbb{L}_\alpha[P]$ et donc $\forall \xi \geq \alpha$ $P\cap \mathbb{L}_\xi[P] = \bar P$ et on a alors $\bar P \in Def(\mathbb{L}_\alpha[P], \in, P\cap\mathbb{L}_\alpha[P])$.

(3) On vérifie $\bar P \cap \mathbb{L}_\xi[P] = P\cap \mathbb{L}_\xi[P]$ $\forall \xi$ donc $\mathbb{L}[\bar P] = \mathbb{L}[P]$.

Théorème : • $\mathbb{L}[P]$ est un modèle interne de ZF
• $\mathbb{L}[P] \models AC$

Preuve : Le premier point suit du critère 2 et le deuxième se fait comme pour la preuve de $\mathbb{L}$. 183

On peut montrer de la même façon que précédemment que :

Théorème : $\mathbb{L}[P]$ est le plus petit modèle interne $\mathbb{M}$ de ZF tel que $\mathbb{M} \cap P \in \mathbb{M}$.

Remarque : (i) Si $P \subseteq Ord$, ou $P \subseteq \mathbb{L}$, $P \in \mathbb{L}[P]$, en particulier pour $a \subseteq \omega$, $a \in \mathbb{L}[a]$.
(ii) Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre κ-complet sur $\kappa > \aleph_0$, alors $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cap \mathbb{L}[\mathcal{U}]$ est un ultrafiltre κ-complet sur κ.

Remarque (Sur l'hypothèse du continu)

On suppose que $\mathbb{V} \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ (cf Lavaux p147) et soit $S = \{a_\xi \mid \xi < \aleph_2\}$ avec $a_\xi \subseteq \omega$ 2 à 2 distincts.
On pose $\mu = \aleph_2$ et $P = \{(\xi, k) \in \mu \times \omega \mid k \in a_\xi\} \subseteq \mu \times \omega \subseteq \mathbb{L}$
$P \in \mathbb{L}[P]$ donc $S \in \mathbb{L}[P]$ donc $\mathbb{L}[P] \models 2^{\aleph_0} \geq \mu$ or $\mu \geq \aleph_2^{\mathbb{L}[P]}$ donc $\mathbb{L}[P] \models \neg HC$.
En revanche, pour $P \subseteq \kappa$, $\mathbb{L}[P] \models \forall \lambda$ card $\geq \kappa$ $2^\lambda = \lambda^+$

N.B. : On a donc $\forall a \subseteq \omega$, $\mathbb{L}[a] \models HGC$ et si Q est quelconque, avec $\mathbb{V} = \mathbb{L}[Q]$ $\exists \mu$ tq $\forall \lambda \geq \mu$ $2^\lambda = \lambda^+$.

Remarque ($\mathbb{L}[\mathbb{A}]$)

Pour une classe $\mathbb{A}$ on définit $\mathbb{L}[\mathbb{A}]$ comme précédemment, si $\mathbb{A}$ est une classe propre on a que $x \in \mathbb{L}[\mathbb{A}] \Rightarrow x \cap \mathbb{A} \in \mathbb{L}[\mathbb{A}]$ et donc pour tout ordinal $\lambda \cap \mathbb{A} \in \mathbb{L}[\mathbb{A}]$.

Sous l'hypothèse $\mathbb{V} = \mathbb{L}[\mathbb{A}]$ on peut définir un bon ordre de l'univers, on est donc sous ACG, i.e. $\forall u \neq \emptyset \; F(u) \in u$ pour une fonction F dans le langage, fct de choix globale.

On peut alors montrer que si $\mathbb{V} \models ACG$ (i.e. on peut définir une fct de choix globale, ou de manière équivalente un bon ordre de l'univers) alors $\mathbb{V} = \mathbb{L}[\mathbb{A}]$ pour une certaine classe $\mathbb{A}$ d'ordinaux. On peut aussi démontrer que si $\mathbb{V} = \mathbb{L}[\mathbb{A}]$ alors on peut prouver ACG.

La construction de Scott

La construction de Scott consiste à former une ultrapuissance d'un univers $V \models ZF(C)$. On va rencontrer la notion de cardinal mesurable.

. Cardinaux mesurables.

On se rappelle la notion de filtre sur un ensemble I, c'est une partie $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ qui contient I et pas $\emptyset$ qui est stable par intersection finie et par sur-ensemble.

Pour λ un cardinal, on dit qu'un filtre F sur I est λ-complet si F est aussi stable par intersection de famille de cardinal $< \lambda$, i.e. $\forall \nu < \lambda \quad \forall (E_i)_{i<\nu} \in F, \ \bigcap_{i<\nu} E_i \in F$.

On rappelle les notations pour les ultrapuissances :

- $\mathcal{U}$ uf sur I, $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure, $\mathcal{A}^I/\mathcal{U}$ est l'ultrapuissance
- $f \in A^I$, $[f] \in \mathcal{A}^I/\mathcal{U}$.
- $j_{\mathcal{U}} : \mathcal{A} \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathcal{A}^I/\mathcal{U}$ plongement élémentaire

  $c \mapsto [\hat{c}] \quad \hat{c} : I \to A, \ i \mapsto c$

Théorème de Łoś : $\mathcal{A}^I/\mathcal{U} \models \varphi[[f_1] \dots [f_n]]$ ssi $\{ i \in I \ \mathcal{A} \models \varphi[f_1(i), \dots f_n(i)] \} \in \mathcal{U}$.

Proposition : Soit $\mathcal{A} = (A, \lhd) \in V$ où $\lhd$ est une relation bien fondée, alors si $\mathcal{U}$ est un uf $\aleph_1$-complet ($=\sigma$-complet) $(\mathcal{A}^I/\mathcal{U}, \lhd)$ est aussi bien fondée

Preuve : Si $\lhd_{\mathcal{U}}$ est non bien fondée, on a $[f_0] \rhd_{\mathcal{U}} [f_1] \rhd \dots$ une ω-suite décroissante et soit $E_n = \{ i \in I, \ f_n(i) \rhd f_{n+1}(i) \text{ dans } \mathcal{A} \} \in \mathcal{U}$ alors $\bigcap_{n \in \omega} E_n \in \mathcal{U}$ et donc $\exists \, i \in \bigcap E_n$ tq $\mathcal{A} \models f_0(i) \rhd f_1(i) \rhd \dots$ et $\mathcal{A}$ n'est pas bien fondé. ⊠

N.B. : Par complétude et maximalité : $(A_\xi)_{\xi<\nu} \notin \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup A_\xi \notin \mathcal{U}$

Remarque : Cela signifie en particulier que si l'on dispose d'une structure $\mathcal{N} = (M, \in_M)$ avec M transitif. On a alors

- $\in_M$ est extensionnelle (par transitivité et Δ_0 ex ext)
- $\in_M$ est bien fondée ($M \in \mathbb{V}$)

Par conséquent $(\mathcal{N}^I/\mathcal{U}, \in_{\mathcal{U}})$ est aussi extensionnelle par élémentaire équivalence et de plus avec $\mathcal{U}$ σ-complet $\in_{\mathcal{U}}$ est bien fondée. En utilisant le collapse de Mostowski (cf V.87) il existe $(K, \in_K)$ avec K transitif tel que $\mathcal{N}^I/\mathcal{U} \cong (K, \in_K)$.

Définition : Un cardinal $\kappa > \omega$ est dit mesurable s'il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur κ non principal et κ-complet.

Remarques :

- On montre que s'il existe κ avec un ultrafiltre non principal σ-complet, alors le plus petit tel κ est mesurable.
- Un uf $\mathcal{U}$ est uniforme si tout élément de $\mathcal{U}$ a le même cardinal. Si κ est mesurable et $\mathcal{U}$ est n.p κ-comp. sur κ alors $\mathcal{U}$ est uniforme et tout élément a cardinal κ.
(en effet si $|A| < \kappa$, $A \subseteq \kappa$, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ comme $\{x\} \notin \mathcal{U}$, $\bigcup_{x \in A} \{x\} \notin \mathcal{U}$ car $\mathcal{U}$ est κ-complet).

Théorème : Si κ est mesurable, κ est inaccessible.

Preuve : 1. κ régulier : soit $h : \lambda \to \kappa$ cofinale, on a $\kappa = \bigcup_{\xi < \lambda} h(\xi)$.
or $h(\xi) \subsetneq \kappa$ donc $|h(\xi)| < \kappa$ et par uniformité $h(\xi) \notin \mathcal{U}$,
or par κ-complétude $\bigcup h(\xi) = \kappa \notin \mathcal{U}$ ↯

2. κ fortement limite ($\mu < \kappa \Rightarrow 2^\mu < \kappa$) : soit donc $\mu < \kappa$ et supposons $2^\mu \geq \kappa$ on a donc $(f_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ $f_\alpha : \mu \to 2$ et $\alpha \neq \beta \Rightarrow f_\alpha \neq f_\beta$

Pour $\eta < \mu$, $E_\eta^\varepsilon := \{\xi < \kappa,\ f_\xi(\eta) = \varepsilon\}$ $\quad \varepsilon = 0, 1$
l'un des 2 est dedans

On a $E_\eta^\varepsilon = \kappa \setminus E_\eta^{1-\varepsilon}$ donc comme $\mathcal{U}$ est maximal on pose ε_η tel que $E_\eta^{\varepsilon_\eta} \in \mathcal{U}$, mais alors $\bigcap_{\eta<\mu} E_\eta^{\varepsilon_\eta} \in \mathcal{U}$ donc est infini et on a au moins 2 éléments, mais si $\alpha \neq \beta \in \bigcap_{\eta<\mu} E_\eta^{\varepsilon_\eta}$, $f_\alpha = f_\beta$ ↯ ∎

Corollaire : ZFC $\not\models$ "$\exists \kappa$ κ est un cardinal mesurable".

Preuve : On a vu p 60 que ZFC + $\neg$ CI était consistant donc ZFC $\not\models$ CI. On sait que si κ est fortement inaccessible, $V_\kappa \models$ ZFC. Or si ZFC $\models \exists \kappa$ mesurable alors ZFC $\models$ CI ce qui est absurde. On peut aussi dire que si ZFC $\models$ CI ZFC prouve sa propre consistance ce qui contredit le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel ∎.

- La construction de Scott, ultrapuissance de l'univers

Soit κ un card mesurable $\mathcal{U}$ uf n.p κ-complet sur κ.
On voudrait travailler dans $V^\kappa/\mathcal{U}$, le problème étant que pour $f \in V^\kappa$, $[f]$ sont des classes propres, pour cela on va avoir recours à Scott's Trick : On restreint la classe d'équivalence aux éléments de rang minimal :

$$[f]^- := \{ g \in V^\kappa \mid g \sim_\mathcal{U} f \text{ et } rg\, g \text{ minimal} \}$$

$[f]^-$ est un ensemble et on travaille alors dans

$$V^\kappa/\mathcal{U} := \{ [f]^- \mid f : \kappa \to V \}$$ qui est une classe définissable.

Par les remarques et grâce au collapse de Mostowski, on dispose d'une part d'un plongement élémentaire $j : V \to V^\kappa/\mathcal{U}$ et d'autre part de l'isomorphisme de Mostowski $\pi : V^\kappa/\mathcal{U} \cong M_\mathcal{U}$.
On appelle alors $j_\mathcal{U}$ le plongement élémentaire composé $j_\mathcal{U} : V \to M_\mathcal{U}$ avec $M_\mathcal{U}$ une classe transitive.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j_\mathcal{U}"'] & V^\kappa/\mathcal{U} \arrow[d, "\pi"] \\ & M_\mathcal{U} \end{tikzcd}$$

Proposition : On suppose $j : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ comme précédemment

(a) $\forall \alpha < \kappa, \quad j(\alpha) = \alpha$

(b) $j(\kappa) > \kappa$

Preuve : (a) On adopte pour $\alpha \in \mathbb{V}$, $\hat{\alpha} \in \mathbb{V}^{\kappa}$. On montre par récurrence sur α. Soit $f \in \mathbb{V}^{\kappa}$ tq $f \in \hat{\beta}/_{\mathcal{U}}$ pour $\beta < \alpha$, donc $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \beta\} \in \mathcal{U}$ par HR or $\{\xi \in \kappa \mid f(\xi) < \alpha\} = \bigcup_{\beta < \alpha} \{\xi \in \kappa \mid f(\xi) = \beta\} \in \kappa$ par κ-complétude et donc $\pi(f/\mathcal{U}) < \pi(\hat{\alpha}/_{\mathcal{U}})$ i.e. $\beta < j_{\mathcal{U}}(\alpha)$ et si $f \in \mathbb{V}^{\kappa}$ est tq $f/_{\mathcal{U}} < \hat{\alpha}/_{\mathcal{U}}$ on a par HR $\exists \beta < \alpha \; \pi(f/_{\mathcal{U}}) = \beta$ et on conclut que $j_{\mathcal{U}}(\alpha) = \alpha$.

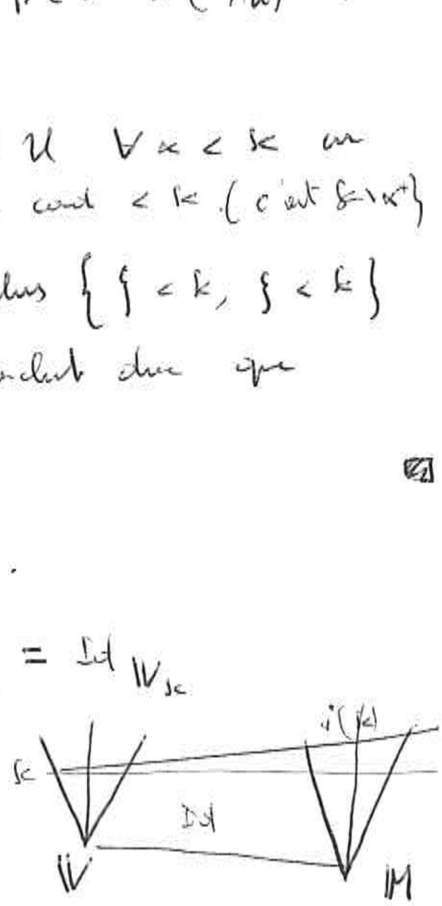
(b) d'une part, on a que $\{\xi < \kappa, \alpha < \xi\} \in \mathcal{U}$ $\forall \alpha < \kappa$ car κ est uniforme et est ensemble et de card $< \kappa$ (c'est $\kappa \setminus \alpha^{+}$) cela donne que $\hat{\alpha}/_{\mathcal{U}} < \frac{\mathrm{Id}_{\kappa}}{\mathcal{U}}$. De plus $\{\xi < \kappa, \xi < \kappa\} \in \mathcal{U}$ (c'est κ) donc $\mathrm{Id}_{\kappa}/_{\mathcal{U}} < \frac{\hat{\kappa}}{\mathcal{U}}$. On conclut donc que

$\kappa \leq \pi\left(\frac{\mathrm{Id}_{\kappa}}{\mathcal{U}}\right) < j(\kappa)$. ☒

N.B. : • En particulier, $j_{\mathcal{U}}$ n'est pas une surjection.

• On montre plus généralement que $j_{|\mathbb{V}_{\kappa}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}_{\kappa}}$

• On a obtenu un "saut" au niveau de κ :



On peut montrer le théorème réciproque :

Théorème : (Réciproque)

Si $j : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{M}$ est une injection élémentaire non triviale dans une classe transitive $\mathbb{M}$

Alors : 1) il existe $\alpha \in \mathrm{On}$ tq $j(\alpha) > \alpha$

2) si κ est le premier tel α, κ est mesurable.

Preuve : 1) On sait que $\exists x \; j(x) \neq x$ soit donc $a \in \mathbb{V}$ minimal tel que $j(a) \neq a$, minimal pour le rg. rg $a = \alpha$. On a $j(\alpha) > \alpha$ car comme j est élémentaire, si $j(\alpha) < \alpha$ on aurait une contradiction ☒

Remarque : L'existence d'un cardinal κ mesurable est équivalente à l'existence d'une injection élémentaire non triviale $j : \mathbb{V} \to \mathbb{M}$ dans une classe transitive.

Théorème de Scott : S'il existe un cardinal mesurable alors $\mathbb{V} \neq \mathbb{L}$.

Preuve : Soit κ le plus petit cardinal mesurable et soit $j : \mathbb{V} \to \mathbb{M}$ comme précédemment. Si $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ alors $\mathbb{M} = \mathbb{L}$ par minimalité de $\mathbb{L}$. Or par élémentarité $\mathbb{L} \models$ "κ est le premier mesurable", donc $\mathbb{M} \models$ "$j(\kappa)$ est le premier mesurable", donc $\mathbb{L} \models$ "κ et $j(\kappa)$ sont les premiers mesurables et $\kappa \neq j(\kappa)$" ce qui est absurde. ∎

Théorème de Kunen : Il n'existe pas d'injection élémentaire $j : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ non triviale.

Preuve : cf Woodin ∎

Théorème : ($j : \mathbb{V} \to \mathbb{M}$, κ mesurable.)

(a) $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathbb{M}$, donc $\mathcal{P}(\kappa) \in \mathbb{M}$

(b) $2^\kappa < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$

(c) $\mathcal{U} \notin \mathbb{M}$ donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa)) \not\subseteq \mathbb{M}$.

Preuve : (a) On montre que $\forall X \subseteq \kappa$, $\kappa \cap j(X) = X$ et $j(X) \subseteq j(\kappa)$

(b) On a que $\mathbb{M} \models$ "$j(\kappa)$ fortement inaccessible" et comme $\mathcal{P}(\kappa) \in \mathbb{M}$ par (a) on a bien $2^\kappa < j(\kappa)$.

On peut vérifier que $j(\kappa) = \mathrm{ot}({}^\kappa\kappa/\mathcal{U})$.

(c) Si $\mathcal{U} \in \mathbb{M}$ on contredit que $2^\kappa < j(\kappa)$. En effet comme $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathbb{M}$, ${}^\kappa\kappa \subseteq \mathbb{M}$ et $\mathrm{ot}^{\mathbb{M}}({}^\kappa\kappa/\mathcal{U}) = \tilde{\kappa}$ où $\tilde{\kappa}$ est un ensemble et un bon ordre commun sur ot. ∎

Mesure normale

Définition : Soit κ un cardinal mesurable. Un uf $\mathcal{U}$ sur κ κ-complet est dit une <u>mesure normale</u> si pour tout $f : \kappa \to \kappa$ régressive ($f(\xi) < \xi$) il existe $\alpha < \kappa$ tq $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \alpha\} \in \mathcal{U}$, autrement dit toute fonction régressive est constante sur un ensemble de mesure 1.

Théorème : (Existence de mesures normales) Soit $j : V \to M$ une injection élémentaire non triviale associée à $\mathcal{U}$ uf κ complet sur κ (cf section précédente).
Alors $\mathcal{U}_j := \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$
est une mesure normale sur κ.

Preuve : Soit $F : \kappa \to \kappa$ régressive, alors $F \in {}^{\kappa}\kappa$ et $j(F) : j(\kappa) \to j(\kappa)$ est aussi régressive car c'est une propriété élémentaire Δ_0 (et c'est une fct aussi).
Soit $\alpha = (j(F))(\kappa)$, on a que $\alpha < \kappa$ et $\mathrm{dom}(j(F)) = j(\kappa) \ni \kappa$
de plus $\{\xi < \kappa \mid F(\xi) = \alpha\} \subseteq \kappa$ et de plus κ est dans l'image de cet ensemble et donc cet ensemble est dans $\mathcal{U}_j$ ∎

Remarque : • $\mathcal{U}$ κ-complet sur κ est une mesure normale ssi $\mathcal{U}$ est clos par intersection diagonale de taille κ. (cf p45)
• Si $\mathcal{U}$ est une mesure normale sur κ alors $\mathcal{U}$ contient tous les clos cofinaux de κ (cf club p45).

Proposition :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\leq"] \arrow[dr, "j_{\mathcal{U}}"'] & V^{\kappa}/\mathcal{U} \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

$\mathcal{U}$ est une mesure normale sur κ ssi $\kappa = \pi(\mathrm{Id}_{\kappa}/\mathcal{U})$

Preuve :

Théorème : Soit κ mesurable. $\mathcal{U}$ une mesure normale sur κ.

Alors pour toute formule $\varphi(x)$

$$\mathbb{M} \models \varphi(\kappa) \quad \text{ssi} \quad \{\xi < \kappa \,.\, \varphi(\xi)\} \in \mathcal{U}$$

Preuve : $\mathbb{M}_{\mathcal{U}} \models \varphi(\kappa)$ ssi $\mathbb{M}_{\mathcal{U}} \models \varphi\left(\pi\left({}^{\mathrm{Id}\,\kappa}/\mathcal{U}\right)\right)$

ssi $\dfrac{\mathbb{V}^{\kappa}}{\mathcal{U}} \models \varphi\left[{}^{\mathrm{Id}\,\kappa}/\mathcal{U}\right]$

ssi $\{\xi < \kappa \quad \mathbb{V} \models \varphi(\xi)\} \in \mathcal{U}$. ∎

Corollaire : Soit κ cardinal mesurable $\mathcal{U}$ mesure normale

Alors $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ est un cardinal fortement inaccessible$\} \in \mathcal{U}$

Preuve : C'est le théorème précédent avec φ = cardinal inaccessible et $\mathbb{M} \models \kappa$ fortement inaccessible (Π_1) (vrai dans $\mathbb{V}$ donc dans $\mathbb{M}$). ∎

Remarque : Le corollaire précédent est donc vrai avec toute propriété Π_1 vraie dans ZFC. (dans $\mathbb{V}$).

Théorème : Soit κ un cardinal mesurable, si $\forall \lambda \overset{\text{infini}}{<} \kappa$

$2^{\lambda} = \lambda^{+}$ alors $2^{\kappa} = \kappa^{+}$

Preuve : Soit $\mathcal{U}$ une mesure normale sur κ. Sous les hypothèses

$\{\overset{\text{card}}{\lambda} < \kappa \mid 2^{\lambda} = \lambda^{+}\} \in \mathcal{U}$ (car c'est un club cofinal com pt fixe). Donc $\mathbb{M} \models 2^{\kappa} = \kappa^{+}$ $\mathbb{M} \models \mathcal{P}(\kappa) \sim \kappa^{+}$ or $(\mathcal{P}(\kappa))^{\mathbb{M}} = \mathcal{P}(\kappa)$ par la section précédente, de plus $(\kappa^{+})^{\mathbb{M}} = \kappa^{+}$ et donc $2^{\kappa} = \kappa^{+}$ ∎

- Cardinaux mesurable et HGC

Soit κ mesurable et $\mathcal{U}$ une mesure normale. On sait que

$\mathcal{U} \cap \mathbb{L}[\mathcal{U}] \in \mathbb{L}[\mathcal{U}]$, on pose $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cap \mathbb{L}[\mathcal{U}]$.

On vérifie que $\bar{\mathcal{U}}$ est une mesure normale sur κ.

Théorème de Silver $\quad \mathbb{L}[\mathcal{U}] \models HGC$

Théorème de Solovay : Soit M un modèle transitif dénombrable de ZFC avec $\kappa \in \mathbb{M}$, κ mesurable dans $\mathbb{M}$. Soit $\mathbb{P} \in M$ une notion de forcing tq $M \models |\mathbb{P}| < \kappa$. Alors $\forall G$ filtre $\mathbb{P}$-générique sur M $\quad M[G] \models \kappa$ est mesurable.

Corollaire : Si "$\exists \kappa$ mesurable" est consistant avec ZFC

Alors "$\exists \kappa$ mesurable" + HC est consistant

"$\exists \kappa$ mesurable" + $\neg$HC est consistant

NB : Pour le forcing cf p 135

Préliminaires pour le forcing

On introduit dans cette section les outils qui seront utilisés pour le forcing dans les sections suivantes.

On suppose l'existence d'un ensemble $M \in V$ qui est un modèle de ZF et qui est de plus dénombrable. Les hypothèses sur M sont discutées p 136

On remarque d'abord quelques faits sur M :

- si $a, b \in M$, $\{a,b\}$, (a,b) et $\cup a \in M$.
- si $E \subseteq M$, E fini, alors $E \in M$
- $\omega \in M$
- $M^{<\omega} \in M$

Ce sont des conséquences de la transitivité de M ainsi que du fait que $M \models ZF$.

- <u>Ensemble partiellement ordonnés, notion de forcing</u>

Une <u>notion de forcing</u> est un ordre partiel $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq)$ qui possède un maximum $1\!\!1_{\mathbb{P}}$. $p \leq_{\mathbb{P}} q$ se lit "p plus fort que q".
$p, q \in \mathbb{P}$ sont dits <u>compatibles</u> s'il existe $r \in \mathbb{P}$ tel que $r \leq p$ et $r \leq q$. Sinon ils sont dits incompatibles, noté $p \perp q$.

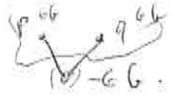
<u>Exemple</u> : Pour $A, B \in M$ on note $\mathbb{P}_{AB}$ l'ensemble des fonctions partielles $A \xrightarrow[p]{} B$ de <u>domaine fini</u>. On a $\mathbb{P}_{AB} \in M$, en effet $\mathbb{P}_{AB} \subseteq A \times B \in M$. De plus la fonctionnelle $\mathbb{P}_{A,B}$ est Δ_0^{ZF}.
On munit alors $\mathbb{P}_{A,B}$ de l'ordre $p \leq_{\mathbb{P}} q$ ssi $q \subseteq p$. On a alors pour cet ordre $1\!\!1_{\mathbb{P}} = \emptyset \subseteq p$ $\forall p \in \mathbb{P}$ donc $\emptyset \geq p$ $\forall p \in \mathbb{P}$.
On a que p et q sont <u>compatibles</u> ssi $\forall x \in \mathrm{Dom}\, p \cap \mathrm{Dom}\, q$ $p(x) = q(x)$

Pour une notion de forcing $\mathbb{P}$, $G \subseteq \mathbb{P}$ est un <u>filtre</u> si

(1) $G \neq \emptyset$

(2) $p \in G$ et $p \leq q \Rightarrow q \in G$

(3) $p, q \in G \Rightarrow \exists r \in G$ $r \leq p$, $r \leq q$

Un filtre est donc une partie non vide de $\mathbb{P}$ qui est stable par élément supérieur (inclusion) et tout deux éléments possèdent un inf (intersection). On dit que la partie est filtrante. Remarquons que tout filtre contient $1_{\mathbb{P}}$.

Exemple : • Pour $G \subseteq \mathbb{P}_{AB}$ un filtre on pose $f_G = \bigcup G$, f_G est une fonction partielle, elle est minimale au sens de $\leq_{\mathbb{P}_{AB}}$ et maximale au sens de l'inclusion. ($\bigcup G$ est bien une fonction et tout filtre sur $\mathbb{P}_{AB}$ $1_1 = \emptyset$ et est de la forme $\{s \subseteq f,\ s \in \mathbb{P}_{AB}\}$ pour un f.)

• Si h est dans $\mathbb{P}_{AB}$, on pose
$$G_h = \left\{ s \in \mathbb{P}_{AB},\ \begin{matrix} s \subseteq h \\ h \leq s \end{matrix} \right\}$$
Alors G_h est un filtre, de plus $f_{G_h} = h$.

• Partie dense et filtre générique.

• Une partie $D \subseteq \mathbb{P}$ est <u>dense</u> si pour tout $p \in \mathbb{P}$, il existe $q \in D$ tel que $q \leq p$.

• Pour $\mathcal{E} \in V$. Un filtre $G \subseteq \mathbb{P}$ est <u>$\mathbb{P}$-générique sur $\mathcal{E}$</u> si pour toute partie dense $D \in \mathcal{E}$, $G \cap D \neq \emptyset$.

Exemple : • Dans $\mathbb{P}_{AB}$, pour $a \in A$, $D_a := \{ s \in \mathbb{P}_{AB} \mid a \in \mathrm{Dom}(s) \}$ c'est une partie <u>dense dans $\mathbb{P}_{AB}$</u>, en effet si $p \in \mathbb{P}_{AB}$ si $a \notin \mathrm{Dom}(s)$, on peut définir $q = p \cup \{(a, x)\}$ par $x \in B$ qcq alors $q \leq p$ $(p \subseteq q)$ et $q \in D_a$.

: De même pour $b \in B$, $D^b := \{ s \in \mathbb{P}_{AB},\ b \in \mathrm{Im}\, s \}$ est <u>dense</u> si A est infini (il faut bien trouver un antécédent de $b \notin \mathrm{dom}\, p$).

• On suppose à présent que $\mathcal{E}$ est tel que $D_a \in \mathcal{E}$ $\forall a \in A$. Si G est $\mathbb{P}_{AB}$-générique sur $\mathcal{E}$, $f_G := \bigcup G$ alors f_G est totale puisque $\forall a \in A$ $D_a \cap G \neq \emptyset$ donc si $p \in D_a \cap G$, $p \subseteq f_G$ donc $a \in \mathrm{Dom}\, f_G$.

De plus si $D^b \in \mathcal{E}$ $\forall b \in B$, f_G est surjective.

<u>Informellement</u> : • D est dense dans $\mathbb{P}_{AB}$ signifie que toute fct de $\mathbb{P}_{AB}$ peut être étendue en une fct de D.

Théorème d'existence des génériques :

> Si $\mathcal{E}$ est dénombrable alors pour tout $q \in \mathbb{P}$ il existe un filtre $G \subseteq \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$-générique sur $\mathcal{E}$ tel que $q \in G$.

__Preuve__ : Soit $\{D_n\}_{n\in\omega}$ une énumération des parties denses dans $\mathbb{P}$ de $\mathcal{E}$, et $q \in \mathbb{P}$. Par récurrence on a une suite $(p_n)_{n\in\omega} \in \prod_\omega D_n$ tel que $p_{n+1} \leq p_n \leq q$. $p_0 \in D_0$ et tel que $p_0 \leq q$, existe puisque D_0 est dense. ensuite puisque D_{n+1} est dense et si $p_n \in D_n$ $p_n \leq q$, on peut prendre $p_{n+1} \overset{\in D_{n+1}}{\leq} p_n \leq q$ par densité de D_{n+1}. On pose :

$$G := \{r \in \mathbb{P},\ \exists k \in \omega\ \ r \geq p_k\}$$

On montre que G est un filtre et clairement $p_k \in G$ $\forall k$ donc $G \cap D_n \neq \emptyset$. $G \neq \emptyset$ car il contient q ; si $r \in G$ et $r \leq r'$, on a $p_k \leq r \leq r'$ donc $r' \in G$. et si $r, r' \in G$ $\exists k, k'$ tq $p_k \leq r$ $p_{k'} \leq r'$ et comme (p_n) totalement ordonnée on a $\min(p_k, p_{k'}) \leq r$ et r'. ■

• $\mathbb{P}$-termes et $M[G]$.

Dans la suite $\mathbb{P} \in M$ désigne une notion de forcing et G un filtre $G \subseteq \mathbb{P}$. ("$\mathbb{P}$ est une notion de forcing" est Δ_0 on a donc, puisque M est transitif $M \models$ $\mathbb{P}$ est une notion de forcing).

__Définition__ : Un __$\mathbb{P}$-terme__ τ est un ensemble de couples tel que

$$(\sigma, p) \in \tau \implies \sigma \text{ est un } \mathbb{P}\text{-terme et } p \in \mathbb{P}$$

On peut les définir par induction bien fondée pour la relation

$$\sigma \lhd \tau \quad \text{ssi} \quad \exists p \quad (\sigma, p) \in \tau$$

On note $V^{\mathbb{P}}$ la classe des $\mathbb{P}$-termes. On peut aussi les définir de la façon suivante :

$$V_0^{\mathbb{P}} = \emptyset \qquad V_\lambda^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$$

$$V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} = \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P})$$

on pose alors $V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$. On note $M^{\mathbb{P}} = M \cap V^{\mathbb{P}}$

On a que "τ est un $\mathbb{P}$-terme" est Δ^{ZF_0}, donc $M^{\mathbb{P}} = \{\tau \in M \mid M \models \text{"}\tau \text{ est un } \mathbb{P}\text{-terme"}\}$

Définition (Valeur d'un $\mathbb{P}$-terme) : Pour τ un $\mathbb{P}$-terme, la valeur de τ selon G est :

$$\tau^G := \{\sigma^G \mid \exists p \in G \quad (\sigma, p) \in \tau\}$$

$\tau^G = Vol(\tau, G)$ avec $Vol : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ est définie par récurrence bien fondée sur $\triangleleft$. Vol est une fonctionnelle Δ.

Exemple : • $\emptyset$ est un $\mathbb{P}$-terme et $\emptyset^G = \emptyset$

• $p \in \mathbb{P}$ et $\tau = \{(\emptyset, p)\}$. τ est un $\mathbb{P}$-terme et on a

$$\tau^G = \{\emptyset\} = 1 \text{ si } p \in G \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

• si $x \in \mathbb{V}$, on définit par $\in$-récurrence :

$$\check{x} = \{(\check{y}, 1\!\!1_{\mathbb{P}}),\ y \in x\} \quad \text{c'est un } \mathbb{P}\text{-terme.}$$

autrement dit : si z est un élément $\in$-minimal (par fondation) de x $(\check{z}, 1\!\!1_{\mathbb{P}}) \in \check{x}$, on a $|x|$ élément dans $\check{x}$, i.e. $|\check{x}| = x$.

$\check{\emptyset} = \emptyset$, $\check{\{\emptyset\}} = \{(\emptyset, 1\!\!1_{\mathbb{P}})\}$, $\{\check{\{\emptyset\}}\} = \{(\{(\emptyset, 1\!\!1_{\mathbb{P}})\}, 1\!\!1_{\mathbb{P}})\}$ etc.

On a $\check{\{\emptyset\}}^G = \{\emptyset\}$ ($\check{\emptyset}^G = \emptyset$ si $1\!\!1_{\mathbb{P}} \in G$) et plus généralement $\check{x}^G = x$ (en effet, $1\!\!1_{\mathbb{P}} \in G$). On le montre par $\in$-récurrence, on suppose que pour tout $y \in x$, $\check{y}^G = y$. Alors comme

$$\check{x} = \{\check{y}^G \mid y \in x\}$$

le résultat est immédiat.

• On définit $\gamma_{\mathbb{P}} := \{(\check{p}, p) \mid p \in \mathbb{P}\}$

On a alors que $\gamma_{\mathbb{P}}$ est lui-même un $\mathbb{P}$-terme et de plus

$\gamma_{\mathbb{P}}{}^G = \{\check{p}^G,\ p \in G\} = G$.

Définition : Pour $M \ni \mathbb{P}$ et G un filtre on note

$$M[G] = \{ \tau^G \mid \tau \in M^{\mathbb{P}} \}$$

$M[G]$ est donc l'ensemble des valeurs des $\mathbb{P}$-termes de M selon G.

Théorème : Pour M transitif $\ni \mathbb{P}$ et G un filtre sur $\mathbb{P}$,

(1) $M[G]$ est un ensemble transitif

(2) $M \subseteq M[G]$

(3) $G \in M[G]$

(4) $\mathrm{Ord} \cap M[G] = \mathrm{Ord} \cap M$

Preuve : (1) soient $s \in t \in M[G]$. $t = \tau^G = \{ \sigma^G, \ p \in \mathbb{P}, \ (\sigma, p) \in \tau \}$ donc $s = \sigma^G$, il reste à vérifier que $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$, or $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ et donc $\tau \in M$ donc par transitivité de M, $(\sigma, p) \in M$ donc $\sigma \in M$ et donc $\sigma \in M \cap V^{\mathbb{P}} = M^{\mathbb{P}}$.

(2) $M = \{ x, \ x \in M \} = \{ \check{x}^G, \ x \in M \} \subseteq M[G]$ en effet $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$ pour $x \in M$, par transitivité de M.

(3) $G = \gamma_{\mathbb{P}}^G$ il reste à vérifier que $\gamma_{\mathbb{P}} \in M^{\mathbb{P}}$. Or $\gamma_{\mathbb{P}}$ est donné par une formule Δ donc par absoluité dans M transitif $\gamma_{\mathbb{P}}^{(M)} = \gamma_{\mathbb{P}}$ donc $\gamma_{\mathbb{P}} \in M$.

(4) On a par (2) $\mathrm{Ord} \cap M \subseteq \mathrm{Ord} \cap M[G]$.

Tout d'abord : $\quad \mathrm{rg}(\tau^G) \leq \mathrm{rg}(\tau) \qquad (\dagger)$

En effet : par induction : si $\mathrm{rg}\, \sigma^G \leq \mathrm{rg}\, \sigma \quad \forall \sigma$ tq $(\sigma, p) \in \tau$

$$\begin{aligned} \text{alors } \mathrm{rg}\, \tau^G &= \mathrm{rg} \{ \sigma^G \mid \exists p \in G \ (\sigma, p) \in \tau \} \\ &\leq \mathrm{rg} \{ \sigma \mid \exists p \in G \ (\sigma, p) \in \tau \} \\ &\leq \mathrm{rg} \{ (\sigma, p) \ , (\sigma, p) \in \tau \} = \mathrm{rg}\, \tau . \end{aligned}$$

Soit $\kappa \in \mathrm{Ord} \cap M[G]$, $\kappa = \sigma^G$ pour $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. À présent

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(\kappa) = \mathrm{rg}(\sigma^G) &\overset{(\dagger)}{\leq} \mathrm{rg}(\sigma) \\ &= \mathrm{rg}^{(M)}(\sigma) \in \mathrm{Ord} \cap M . \end{aligned}$$

car rg est une fonctionnelle Δ. $\blacksquare$

Forcing

Cette notion aborde les points clés de la méthode du forcing : les lemmes de vérité et de définissabilité.

Définition : Soit $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ une $\mathcal{L}_{ZF}$ formule. $\tau_0 \dots \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ et $p \in \mathbb{P}$. On dit que p force $\varphi(\tau_0 \dots \tau_n)$ si pour tout $G \ni p$ filtre $\mathbb{P}$-générique sur M (partie dense dans $\mathbb{P}$ de M) $M[G] \models \varphi[\tau_0^G, \dots, \tau_n^G]$.

On notera alors $p \Vdash^M_{\mathbb{P}} \varphi(\bar{\tau})$, ou $p \Vdash \varphi(\bar{\tau})$ ou $p \Vdash \varphi$.

Exemple : Pour $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega,2}$, $p_1 = \{(0,0), (1,0)\}$ $p_2 = \{(0,1), (1,0)\}$

on a $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. Si G est un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M, on dispose de la fonction $f_G = \bigcup G : \omega \longrightarrow \{0,1\}$ (en fait toute partie de G est une restriction de f_G). On définit $\tau = \{(\check{a}, \{0\}) \; a \in f_G\}$ alors $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ et $\tau^G = \{\check{a}^G, a \in f_G\} = \{a, a \in f_G\} = f_G$.

Pour $p \in \mathbb{P}$, $p \in G$, on a si $\varphi(x,y,z)$ dit $x : y \longrightarrow z$ que $M[G] \models f_G : \omega \longrightarrow 2$ donc $M[G] \models \varphi(f_G, \omega, 2)$ i.e.

$p \Vdash \tau : \check{\omega} \longrightarrow \check{2}$. (ne dépend pas de p en fait).

En revanche $\forall G \ni p_1$ on a $f_G(0) = f_G(1) \; (= 0)$ donc

$$p_1 \Vdash \tau(0) = \tau(1)$$

et de même $\quad p_2 \Vdash \tau(0) \neq \tau(1)$.

Quelques propriétés élémentaires de $\Vdash$:

Proposition :

(1) $p \Vdash \varphi(\bar{\tau})$ et $q \leq p \Rightarrow q \Vdash \varphi(\bar{\tau})$

(2) Soient $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ tq $\varphi \vdash \psi$
alors $p \Vdash \varphi(\bar{\tau}) \Rightarrow p \Vdash \psi(\bar{\tau})$

(3) $p \Vdash \neg\varphi \Rightarrow p \nVdash \varphi$ (réciproque fausse)

(4) $p \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ssi $p \Vdash \varphi_1$ et $p \Vdash \varphi_2$.

(5) $p \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \Leftarrow p \Vdash \varphi_1$ ou $p \Vdash \varphi_2$ (réciproque fausse)

(6) $p \Vdash \forall x\, \varphi(\bar{\tau}, x)$ ssi "$\forall \tau \in M^{\mathbb{P}}$ $p \Vdash \varphi(\bar{\tau}, \tau)$"

(7) Il existe $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tq $p \Vdash \varphi(\bar{\tau}, \tau) \Rightarrow p \Vdash \exists x\, \varphi(\bar{\tau}, x)$
(réciproque fausse).

Preuve : (1) C'est évident puisque un filtre est stable par élément inférieur donc tout filtre contenant q contient p.
(2) C'est une simple conséquence du fait que $M[G] \models \varphi \Rightarrow M[G] \models \varphi$.
(3) Si $p \Vdash \neg\varphi$, alors pour tout filtre G ($\mathbb{P}$-générique) contenant p, $M[G] \models \neg\varphi$ donc $M[G] \not\models \varphi$ on ne peut donc pas avoir $p \Vdash \varphi$.
(4) C'est assez clair
(5) Si $p \Vdash \varphi_1$ alors $p \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$.
(6) Si $p \Vdash \forall w\, \varphi(\bar{\tau}, w)$ alors $\forall G$ - $\mathbb{P}$-générique$/M$, $p \in G$ $M[G] \models \varphi(\bar{\tau}^G, \tau^G)$ donc $\forall \tau \in M^{\mathbb{P}}$, $p \Vdash \varphi(\bar{\tau}, \tau)$, la réciproque est tout aussi simple.
(7) Il existe $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tq $p \Vdash \varphi(\bar{\tau}, \tau) \Rightarrow \forall G \ldots$ $M[G] \models \varphi(\bar{\tau}^G, \tau^G)$ donc $M[G] \models \exists w\, \varphi(\bar{\tau}^G, w)$ donc $p \Vdash \exists w\, \varphi(\bar{\tau}, w)$.
Mais si $p \Vdash \exists w\, \varphi(\bar{\tau}, w)$ alors $\forall G$ - $\mathbb{P}$-g. $\ni p$ $M[G] \models \varphi(\bar{\tau}^G, \tau^G)$ pour un certain τ, qui pourrait dépendre de G, donc on n'a pas la réciproque. ∎

Remarque : • si τ, ζ sont des $\mathbb{P}$-termes $(\tau, p) \in \zeta$ on note $\tau \in_p \zeta$ ($\in \zeta$ modulo p). On a $\tau \in_p \zeta \Rightarrow p \Vdash \tau \in \zeta$.
en effet si G $\mathbb{P}$-gen $\ni p$ alors $\zeta^G = \{\ldots\} \ni \tau^G$ puisque $p \in G$ donc $M[G] \models \zeta^G \ni \tau^G$ et donc $p \Vdash \tau \in \zeta$.
• Si $\forall G$, $\mathbb{P}$-générique sur M on a $M[G] \models \varphi(\bar{\tau}^G)$ alors
$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \varphi(\bar{\tau})$.

N.B : Une chose importante n'a pas été faite : on ne sait pas si tous les filtres $\mathbb{P}$-génériques sur M existent vraiment, et ceci ne peut se justifier que si M est dénombrable (dans V). En effet dans ce cas $\{$parties denses dans $\mathbb{P}\} \subseteq M$ est dénombrable (dans V) et donc par le théorème d'existence des génériques pour un p donné on trouve
G $\mathbb{P}$-générique sur M tel que $p \in G$.

Il est donc important de noter que pour parler de $\Vdash$ on suppose que M est un <u>ensemble dénombrable</u> (dans V.)

<u>Exemple</u> : Pour $A, B \in M$ avec A infini et $B \neq \emptyset$ on voit que $\mathbb{P}_{AB} \in M$

On rappelle que D_a, D^b sont denses dans $\mathbb{P}_{AB}$ et $D_a, D^b \in M$, ainsi si $G \subseteq \mathbb{P}_{AB}$ est $\overset{(\mathbb{P}\text{-})}{\text{générique}}$ (sur M) on a nécessairement $f_G = \bigcup G$ est une surjection et une fonction totale, donc $f_G : A \twoheadrightarrow B$.
Il n'est pas clair que $f_G \in M$, et ce n'est pas le cas sauf si B est un singleton, en revanche $f_G \in M[G]$. (cf p143)

<u>Contre exemples</u> : • $p \not\Vdash \varphi \not\Rightarrow p \Vdash \neg\varphi$: en effet il suffit de prendre l'exemple p., dans $\mathbb{P}_{\omega 2}$ $p = \{(0,1),(1,1)\}$ on a si τ tq $\tau^G = f_G$, $p \not\Vdash \tau(\check{2}) = \check{2}$ et $p \not\Vdash \tau(\check{2}) \neq \check{2}$ en effet on peut prendre le filtre $\mathbb{P}$-générique G_1 associé à $f_1 \supseteq p$ tq $f_1(2) \neq 2$ et un deuxième filtre G_2 $\mathbb{P}$-générique associé à $f_2 \supseteq p$ tq $f_2(2) = 2$
on a alors $M[G_1] \models \tau(\check{2}) \neq \check{2}$ et $M[G_2] \models \tau(\check{2}) = \check{2}$
Le problème est que p ne donne que très peu de contraintes sur f_G.

• <u>$p \Vdash \varphi \vee \psi \not\Rightarrow p \Vdash \varphi$ ou $p \Vdash \psi$</u>. Dans le même esprit que le précédent, pour le même p, on étend p en f_1 tq par exemple $f_1(2) = 0$ et $f_2(2) = 1$ ($\neq 0$). Comme on a que 2 possibilités pour toute fonction étendant p, on a $p \Vdash \tau(2) = 0 \vee \tau(2) \underset{(=1)}{\neq 0}$ en revanche on a ni $p \Vdash \tau(2) = 0$ pour $f_2(2) = 1$ ni $p \Vdash \tau(2) = 1$ puisque $f_1(2) = 0$. L'important est de prendre $2 \notin \operatorname{dom} p$.

• <u>$p \Vdash \exists w\, \varphi(\tau, w) \not\Rightarrow$ il existe $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tq $p \Vdash \varphi(\tau, \sigma)$</u>

En effet prenons $p = \{(0,0)\}$ et $\varphi(x, y) = \exists x\, \tau(x) = y$ où τ est le terme correspondant à f_G (construit indépendamment de G). Alors comme pour tout filtre $\mathbb{P}$ générique f_G est surjective $p \Vdash \exists x\, \tau(x) = \check{1}$ en revanche il n'existe pas de σ tel que $p \Vdash \tau(\sigma) = \check{1}$ puisque le σ varie en fonction du f_G choisi.

Les deux résultats suivants sont les résultats fondamentaux du forcing.

Lemme de définissabilité (LD)

Si φ est une formule, la relation $p \Vdash^{M}_{\mathbb{P}} \varphi(\bar{\tau})$ est définissable dans M. i.e. il existe une formule $\mathrm{Force}_{\varphi}(u, v, \bar{w})$ tq :

$$M \models \mathrm{Force}_{\varphi}(\mathbb{P}, p, \bar{\tau}) \quad \text{ssi} \quad p \in \mathbb{P},\ \bar{\tau} \in M^{\mathbb{P}} \text{ et } p \Vdash^{M}_{\mathbb{P}} \varphi(\bar{\tau})$$

NB: la complexité de Force est fonction de celle de φ, ainsi φ ne peut pas être mise en une variable.

Lemme de Vérité (LV)

Soit φ une formule. Pour tout filtre $G \subseteq \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$-gen. sur M

$$M[G] \models \varphi[\bar{\tau}^{G}] \Rightarrow \text{il existe } p \in G \text{ tel que } p \Vdash^{M}_{\mathbb{P}} \varphi(\bar{\tau}).$$

"ce qui est vrai est forcé".

$M[G]$ est un modèle de ZF(C)

On montre à présent que, modulo certaines hypothèses, $M[G]$ est un modèle de ZF pour les théorèmes que $\Vdash$ lui conduit dessus.

Notons que avec compréhension, on peut remplacer UNION et PARTIES par

UNION-Faible : $\forall a \exists b \forall x \forall y (y \in x \in a \to y \in b)$

PARTIES-Faible : $\forall a \exists b \forall x (x \subseteq a \to x \in b)$

Pour l'utilisation de $\Vdash$ et des LV, LD on a besoin que M soit dénombrable et que donc on ait existence de filtre $\mathbb{P}$-générique, mais pour le théorème suivant, chut until, on n'utilise que les propriétés ensemblistes de $M[G]$, comme la transitivité.

Théorème : Soit $\mathbb{P}$ une notion de forcing, G un filtre alors

$$M[G] \models \text{EXT, FOND, INF, PAIRE, UNION-Faible}$$

Preuve : EXT est un énoncé Δ_0, vérifié dans tout ensemble transitif. FOND est immédiat puisque $M[G] \subseteq V$ et $V \models$ FOND, ensuite $\in_{|M[G]}$ est bien fondée. Enfin $\omega \in M \subseteq M[G]$ donc $M[G] \models$ INF.

Pour PAIRE : soient $a, b \in M[G]$, $a = \underset{\in M^{\mathbb{P}}}{\alpha}^G$, $b = \beta^G_{\in M^{\mathbb{P}}}$. On pose alors $\tau = \{(\alpha, 1_{\mathbb{P}}), (\beta, 1_{\mathbb{P}})\}$, $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ clairement et comme $M \models ZF$, que $\alpha, \beta \in M^{\mathbb{P}}$ donc $\in M$, on a aussi $\mathbb{P} \in M$ donc $1_{\mathbb{P}} \in M$ et donc $\tau \in M$ et donc $\tau^G = \{\alpha, \beta\} \in M[G]$.

UNION-Faible : soit $a \in M[G]$, $a = \alpha^G$ avec $\alpha \in M^{\mathbb{P}}$ on pose $\text{dom}(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}\text{-termes dans les couples de } \alpha \\ = \text{pris en 1ère coordonnée des elts de } \alpha \end{array} \right\}$ et $\beta = \bigcup \text{dom}(\alpha)$. β est clairement un $\mathbb{P}$-terme de M et on pose $b = \beta^G \in M[G]$. A présent si $c \in \bigcup a$ c'est un élément d'un élément de $\text{dom}\, \alpha$ et donc $c \in \beta^G$. ∎

N.B : dans la dernière preuve on pourrait avoir $a \subsetneq b$, puisque on prend tous les éléments de $\text{dom}\, \alpha$ alors que peut être que suivant le filtre choisi, seuls certains seront gardés.

Il ne reste plus qu'à montrer que $M[G]$ est un modèle de compréhension restreinte, collection et partie faible. Pour cela on utilise les lemmes de forcing LV et LD qui nécessitent les hypothèses supplémentaires que M est dénombrable et que G est un filtre $\mathbb{P}$-générique.

<u>Théorème :</u> Si G est un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M (M dénombrable)

alors $M \models ZF \Rightarrow M[G] \models ZF$

$M \models ZFC \Rightarrow M[G] \models ZFC$

<u>Preuve :</u> • Schéma de compréhension restreint : φ une formule et $a \in M[G]$.

Soit $b = \{x \in M[G],\ x \in a \text{ et } M[G] \models \varphi[x]\}$ montrons que $b \in M[G]$.

Soit $\alpha \in M^{\mathbb{P}}$ tq $\alpha^G = a$. On rappelle que $\mathrm{Dom}\,\alpha = \{\xi \mid \exists p \in \mathbb{P}\ (\xi, p) \in \alpha\}$

Soit $\beta := \{(\xi, p) \mid \xi \in \mathrm{Dom}\,\alpha \text{ et } p \Vdash (\xi \in \alpha \wedge \varphi(\xi))\}$

Par LD, " $p \Vdash (\xi \in \alpha \wedge \varphi(\xi))$ " est exprimable donc on a bien une fonctionnelle dont l'image est β et $\beta \in M$, on utilise compréhension dans M, et comme c'est un $\mathbb{P}$-terme, $\beta \in M^{\mathbb{P}}$. Montrons que $\beta^G = b$.

Si $x \in b$, on a $x \in a = \alpha^G$ donc $\exists (\xi, q) \in \alpha$ $x = \xi^G$, $q \in G$

de plus $M[G] \models \varphi(\xi^G)$ donc par LV $\exists q' \in G$ tq $q' \Vdash \varphi(\xi)$

Comme G est un filtre $\exists p \leq q$ et $p \leq q'$ donc $(\xi, p) \in \beta$, $x = \xi^G \in \beta^G$.

Si $x \in \beta^G$ alors $x = \xi^G$ avec $(\xi, p) \in \beta$, $p \in G$, $p \Vdash \underbrace{\xi \in \alpha}_{x \in \alpha^G} \wedge \underbrace{\varphi(\xi)}_{M[G] \models \varphi(\xi^G)}$ donc

donc $M[G]$, $x \in \alpha^G = a$ et $M[G] \models \varphi(\xi^G)$ donc $x \in a$ et $M[G] \models \varphi(x)$

i.e. $x \in b$.

• Schéma de collection : $\forall x \in a\ \exists y\ \varphi(x, y) \Rightarrow \exists b\ \forall x \in a\ \exists y \in b\ \varphi(x, y)$

Soit donc $\varphi(x, y)$, $a \in M[G]$. Supposons que $M[G] \models \forall x \in a\ \exists y\ \varphi(x, y)$

$a = \alpha^G$ pour $\alpha \in M^{\mathbb{P}}$. On pose

$$\tilde{\alpha} := \{(\xi, p) \mid \xi \in \mathrm{Dom}\,\alpha \text{ et } \exists \eta \in M^{\mathbb{P}}\ (p \Vdash \varphi(\xi, \eta))\}$$

$\tilde{\alpha} \in M$ par LD (puisque $M^{\mathbb{P}}$ est une relationnelle de M). On a donc $\tilde{\alpha} \in M^{\mathbb{P}}$

Montrons que $\tilde{\alpha}^G \supseteq \alpha^G$: $x \in \alpha^G = a$, par hyp $\exists y \in M[G]$ tq $M[G] \models \varphi(x, y)$, alors $y = \eta^G$, $x = \xi^G$, $\xi \in \mathrm{Dom}\,\alpha$, on a donc $M[G] \models \varphi(\xi^G, \eta^G)$

et par LV il existe p tel que $p \Vdash \varphi(\xi, \eta)$ donc $(\xi, p) \in \tilde{\alpha}$ donc $\eta = \xi^G \in \tilde{\alpha}^G$.

On a donc $\tilde{\alpha}$: $\forall (\xi, p) \in \tilde{\alpha}$, $\exists \eta \in M^{\mathbb{P}}$ $(p \Vdash \varphi(\xi, \eta))$ (par LD c'est exprimable dans M). On utilise collection dans M : il existe $B \in M$ tel que $\forall (\xi, p) \in \tilde{\alpha}$ $\exists \eta \in B$ $p \Vdash \varphi(\xi, \eta)$. On peut supposer $B \subseteq M^{\mathbb{P}}$ (on prend $\breve{B}$) et on pose $\beta = B \times 1\!\!1_{\mathbb{P}}$, on a $\beta \in M^{\mathbb{P}}$ et pour $b = \beta^G$ on a bien $M[G] \models \forall x \in a \, \exists y \in b \; \varphi(x, y)$.

. Parties - Faible : Soit $a \in M[G]$ on cherche $b \in M[G]$ tel que $M[G] \models \forall x \, (x \subseteq a \rightarrow x \in b)$, $a = \alpha^G$, $\alpha \in M^{\mathbb{P}}$.

Pour $s \subseteq a$ $s \in M[G]$ (au sens de $M[G]$) montrons qu'il existe $\tilde{\tau}$ $\in M^{\mathbb{P}}$ tq $\tilde{\tau}^G = s$ et $\underline{\text{Dom}\,\tilde{\tau} \subseteq \text{dom}\,\alpha}$. On a que s est un ensemble de résolution du $\mathbb{P}$-terme donc $\exists \tau \in M^{\mathbb{P}}$ $\tau^G = s$, le point est de montrer que $\tilde{\tau}$ une de dom $\subseteq$ dom α. On pose

$$\tilde{\tau} = \{ (\xi, r) \mid \xi \in \text{dom}\,\alpha \text{ et } r \Vdash \xi \in \tau \}$$

On a que $\tilde{\tau}^G \subseteq \tau^G$ puisque $\xi \in_r \tau$. On montre que $\tilde{\tau}^G \supseteq \tau^G$.
Soit $x \in s = \tau^G$, $x = \xi^G$, $(\xi, p) \in \tau$, $p \in G$, et $M[G] \models \xi^G \in \tau^G$.
Par LV il existe p' tel que $p' \Vdash \xi \in \tau$ pour $q \in G$, $q \leq p$ et p'
on a $q \Vdash \xi \in \tau$ ~~et~~ donc $(\xi, q) \in \tilde{\tau}$ et $x = \xi^G \in \tilde{\tau}^G$.
On pose ensuite $\beta = \{ (\eta, 1\!\!1_{\mathbb{P}}),\ \eta \in M,\ \eta \subseteq \text{Dom}(\alpha) \times \mathbb{P} \}$ comme $M \models$ PARTIES, $B \in M$ et pour $b = \beta^G$, $M[G] \models \forall x (x \subseteq a \rightarrow x \in b)$.

. Si $M \models AC$: Soit $a \in M[G]$ on veut dans $M[G]$ un bon ordre sur a. On a toujours $a = \alpha^G$, $\alpha \in M^{\mathbb{P}} \subseteq M$ et donc soit $< \in M$ un bon ordre sur α. Donc dans $M[G]$, $<$ est un bon ordre de α car bon ordre est Δ^{ZF}. On a dans $M[G]$: $\bar{a} = \{ \xi^G \mid \xi \in \text{Dom}\,\alpha \}$ on a $a \subseteq \bar{a}$ et $f : \alpha \rightarrow \bar{a}$ définie par $f(\xi, p) = \xi^G$ est surjective donc $\bar{a}$ a un bon ordre par f et a aussi

$\blacksquare$

$\underline{\text{N.B.}}$: On utilise LD pour utiliser remplacement dans M, on dit que $\exists p, p \Vdash \ldots$ est relationnelle.

On utilise LV pour obtenir des termes p qui vérifie, force une certaine propriété.

Les modèles $M[G]$

On sait à présent que $M[G] \models ZF$ si M est dénombrable et G est $\mathbb{P}$-générique sur M. Dans cette section on va voir que $M[G]$ est très divers en fonction du filtre G choisi. On montrera que $M[G] \models ZF + \mathbb{V} \neq \mathbb{L}$ dans certains cas de G, mais le plus important reste de voir que l'on va pouvoir falsifier l'hypothèse du continu.

• Un modèle de $ZF + \mathbb{V} \neq \mathbb{L}$

Une notion de forcing $\mathbb{P}$ est <u>non-atomique</u> si $\forall p \in \mathbb{P}$ il existe $q_1, q_2 \leq p$ tels que $q_1 \perp q_2$ (i.e. $\neg \exists r \in \mathbb{P}, \, r \leq q_1, \, r \leq q_2$).

<u>Exemple</u> : Pour A infini et $|B| \geq 2$, $\mathbb{P}_{AB}$ est non atomique car on peut toujours étendre une fct de domaine fini de deux façons différentes.

<u>Théorème</u> : Si G est $\mathbb{P}$-générique sur M et $\mathbb{P}$ est <u>non atomique</u>, alors $G \notin M$, en particulier $M \subsetneq M[G]$.

<u>Preuve</u> : Soit $E = \mathbb{P} \setminus G$, E est dense. En effet si $p \in \mathbb{P}$, $\exists q_1, q_2 \leq p$ tq $q_1 \perp q_2$ donc pour ne pas contredire la règle (3) p 129, soit q_1, soit $q_2 \notin G$, donc disons $q_1 \in E$ et $q_1 \leq p$. E est dense. On a donc que $E \notin M$ car E est une partie dense, et si $E \in M$, par généricité de G, on aurait $E \cap G \neq \emptyset$, donc $E \notin M$ et donc comme $\mathbb{P} \in M$, $G \notin M$ non plus. Comme $G = \gamma_{\mathbb{P}}^{G} \in M[G]$ on a $M \subsetneq M[G]$. ∎

On rappelle que la construction des $\mathbb{L}_\alpha$ est absolue, donc pour $\alpha \in On$ $\mathbb{L}_\alpha^M = \mathbb{L}_\alpha^{M[G]}$, comme $M \subseteq M[G]$ si $M[G] = \mathbb{L}^{M[G]} = \mathbb{L}^M$ on aurait $M[G] \subseteq M$ donc $M[G] = M$ ce qui est absurde par le théorème précédent. On veut donc de montrer :

Théorème : Si $\mathbb{P}$ est non atomique et G un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M, alors $M[G] \models (\mathbb{V} \neq \mathbb{L})$

Corollaire : Soit $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega,2}$, $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M.
Alors $M[G] \models \exists x \; (x \subseteq \omega \wedge x \notin \mathbb{L})$

Preuve : G et $f_G : \omega \to 2$ sont interdéfinissables, se donner G c'est se donner f_G, et donc l'ensemble $x_G = \{n \mid f_G(n) = 1\}$. $x_G \subseteq \omega$. On a $x_G \in M$ ssi $G \in M$ et donc $x_G \notin M$ or comme $\mathbb{L}^{M[G]} = \mathbb{L}^M$, si $x_G \in \mathbb{L}^{M[G]}$, $x_G \in M$ donc on a $x_G \notin \mathbb{L}^{M[G]}$ $\dashv M[G]$. ☺

• Destruction d'un cardinal :

On va voir ici que considérer les notions de forcing $\mathbb{P}_{A,B}$ font apparaître les résultats étonnants qui font la puissance du forcing.

Théorème : Soit $\kappa = \omega_1^M$. Posons $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega,\kappa} \in M$ et soit $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M.
Alors $M[G] \models$ " κ est dénombrable"

$M[G] \models |\mathcal{P}(\omega) \cap \mathbb{L}| = \aleph_0$

Preuve : Dans $M[G]$ on dispose d'une fonction $f_G : \omega \to \kappa$ qui est totale et surjective car comme G est $\mathbb{P}$-générique sur M, on peut toujours étendre les fct partielles et le fait que D^α soit dense donne que la fct est totale, D_i dense donne que f_G est surjective $M[G] \models$ " $\exists x : \omega \to \kappa$ surjective et totale" alors dans $M[G]$, ω_1^M est dénombrable. Évidemment, $\omega_1^{M[G]}$ ne l'est pas par déf mais comme $M \subseteq M[G]$ on peut considérer ω_1^M.

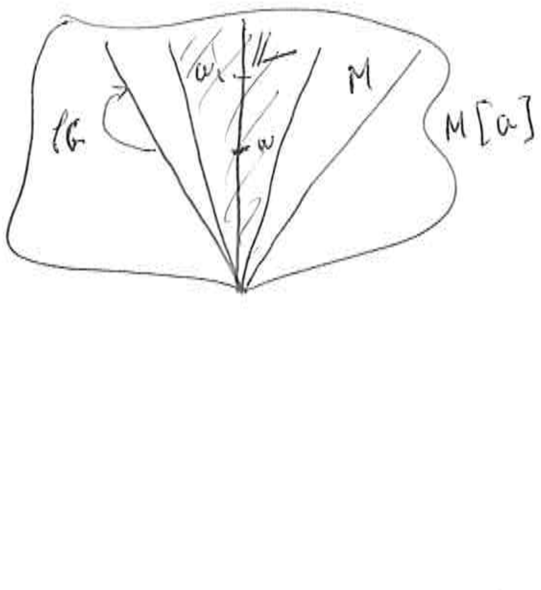
On retiendra en disant que dans $M[G]$, il existe une surjection de ω^M dans ω_1^M (alors que il n'y en a pas dans M). $(\omega^M = \omega^{M[G]})$

On a que $M \models$ "$|P(\omega) \cap \mathbb{L}| = \omega_1^{\mathbb{L}}$" et $M \models$ "$\omega_1^{\mathbb{L}} \le \omega_1$".
Comme $M \subseteq M[G]$ $M[G] \models$ "$|P(\omega) \cap \mathbb{L}| \le \omega_1$" et comme $|\omega_1| = \aleph_0$
dans $M[G]$, $M[G] \models$ "$|P(\omega) \cap \mathbb{L}| \le \aleph_0$" . $\square$

N.B : Ce ne fournit qu'une injection de $\omega \to \omega_1^M$, les autres conditions sont préservées.

Noter que l'apparition de cette fonction f_G est une construction en quelque sorte par compactification à partir des fonctions partielles de $\omega \to \omega_1$, en demandant un filtre G $\mathbb{P}$-générique sur M on "force" f_G a être dans $M[G]$ une injection de $\omega \to \omega_1$.

Remarque : Et le théorème de Cantor ?
On a donc montré que dans $M[G]$ on a $|P(\omega)| = \aleph_0^{(\mathbb{L})} = \aleph_0^{(M)}$.
i.e. $(2^{\aleph_0})^{(\mathbb{L})} = \aleph_0^{(\mathbb{L})}$. Ce n'est pas contradiction avec le théorème de Cantor dans le sens où on a démontré que "dans l'univers $\mathbb{L}$, il n'existe pas d'injection de $P(\omega)$ dans ω" mais la fonction que l'on a trouvée n'est pas dans $\mathbb{L}$ mais dans $M[G]$ qui contient strictement $\mathbb{L}$.



On n'a donc pas en particulier
prouvé que $M[G] \models \neg HC$ mais
$M[G] \models$ "$\mathbb{L} \models \neg HC$"

$M[G] \models \neg HC$

On s'attaque ici à trouver un modèle de ZF qui vérifie $\neg HC$. On va donc falsifier l'hypothèse du continu. Il va être nécessaire quelques conditions sur le forcing utilisé $\mathbb{P}$ afin que les cardinaux dans $M[G]$ ne soient pas trop ravagés, en particulier on voudra que le forcing en question préserve les cardinaux, ce qui signifie que si κ est un cardinal infini $\in M$, $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ alors $M[G] \models$ " κ est un cardinal".

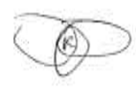
On dira que $\mathbb{P}$ préserve les cardinaux $\geq \kappa$ si $\forall \lambda \overset{\in \mathrm{Card}^M}{\geq} \kappa$ on a que $M[G] \models$ " λ est un cardinal", i.e. $\lambda \in \mathrm{Card}^{M[G]}$. L'idée est que suivant le forcing choisi on enlève, grosso modo, on rajoute des cardinaux de $M[G]$ mais les cardinaux de M restent des cardinaux dans $M[G]$, ils ne sont juste plus à la même place.

On commence une première partie technique

- Condition de chaîne et préservation de cardinaux.

Rappels (Δ-système)

Un ensemble $\mathcal{S}$ est un Δ-système s'il existe R tel que $\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ $s_1 \cap s_2 = R$. R est la racine du Δ système.



Lemme du Δ-système. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble d'ensembles finis de cardinal $|\mathcal{E}| = \kappa$ régulier, alors il existe un Δ-système $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ de cardinal κ.

Définition : Soit $\mathbb{P}$ un ensemble partiellement ordonné.

- $A \subseteq \mathbb{P}$ est une antichaîne si ses éléments sont deux à deux incompatibles.

• Si κ est un cardinal on dit que $\mathbb{P}$ satisfait la <u>κ-condition de chaîne</u> (κ-cc) si toute antichaîne de $\mathbb{P}$ est de cardinal $< \kappa$.

Pour $\kappa = \aleph_1$ on parle de <u>condition de chaîne dénombrable</u>. (i.e. si toute antichaîne de $\mathbb{P}$ est au plus dénombrable).

On note (sous AC) $cc(\mathbb{P})$ le plus petit cardinal κ tel que $\mathbb{P}$ a la κ-cc, on a $cc(\mathbb{P}) \leq |\mathbb{P}|^+$.

<u>Théorème [AC] (Admis)</u> : $cc(\mathbb{P})$ est fini ou infini régulier. De plus si $\mathbb{P}$ possède des antichaînes finies arbitrairement grandes, il en possède une infinie.

<u>Théorème</u> : Soit κ un cardinal de M régulier dans M et $\mathbb{P} \in M$ tel que $M \models$ "$\mathbb{P}$ vérifie la κ-cc". G filtre $\mathbb{P}$-générique sur M. Soit $f : X \to Y \in M[G]$, $X, Y \in M$, alors il existe $F : X \to \mathcal{P}^M(Y)$ tq <u>$F \in M$</u>

(a) $\forall x \in X \quad f(x) \in F(x)$

(b) $M \models \forall x \in X \ (|F(x)| < \kappa)$

<u>Preuve</u> : On suppose que $f = \tau^G$ et donc $M[G] \models$ "$\tau^G : \check{X}^G \to \check{Y}^G$."
Par LV soit $p \in G$ tq $p \Vdash$ "$\tau : \check{X} \to \check{Y}$"
On pose alors pour $x \in X$:
$$F(x) = \{ y \in Y \mid \exists q \leq p \ (q \Vdash \tau(\check{x}) = \check{y}) \}.$$
Par le LD, c'est une fonctionnelle et $F \in M$. On montre que c'est la bonne fct :

(a) Soit $y = f(x)$ on a $M[G] \models \tau^G(\check{x}^G) = \check{y}^G$ comme $p \in G$ et par LV on peut trouver $\underset{\in G}{q \leq p}$ tq $q \Vdash \tau(\check{x}) = \check{y}$ donc $y \in F(x)$.

(b) On construit une injection de $F(x)$ dans une antichaîne de $\mathbb{P}$ et donc on aura (b) par la κ-cc.

Soit donc $\alpha \in X$, pour $y \in F(\alpha)$ il existe $q \le p$ tq $q \Vdash \tau : \check{\alpha} \mapsto \check{y}$ par l'axiome du choix on dispose de $q \in \mathbb{P}^Y$ $q_y \Vdash \tau : \check{\alpha} \mapsto \check{y}$ (on choisit tous les q_y pour $y \in Y$). Montrons que $\{q_y, y \in Y\}$ est une antichaîne, et que q est injective. Si $y_1, y_2 \in F(\alpha)$ $y_1 \neq y_2$ si $r \le q_1$ $r \le q_2$ on a donc $r \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{y}_1 \wedge \tau(\check{\alpha}) = \check{y}_2$ or $y_1 \neq y_2 \Rightarrow \check{y}_1 \neq \check{y}_2$. $\bot$ donc $y \mapsto q_y$ est injective et $\{q_y, y \in Y\}$ est une antichaîne. ☒

On en déduit le théorème qui va bien :

Théorème de préservation des cardinaux par CC

Soit κ un cardinal régulier infini de M, et soit $\mathbb{P} \in M$ tel que $M \models$ « $\mathbb{P}$ a la κ-cc »
Alors $\mathbb{P}$ préserve les cardinaux plus grands que κ.

Preuve : Soit $\lambda \geq \kappa$ $\lambda \in \mathrm{card}^M$, On veut $M[G] \models$ « λ est un card de $M[G]$ »
On le montre par la caractérisation : λ cardinal ssi $\forall \alpha < \lambda$, il n'existe pas de surjection $\alpha \to \lambda$.
Soit donc $f \in M[G]$; $f : \alpha \to \lambda$, montrons que f n'est pas surjective. Par le théorème précédent on dispose de $\underset{\in M}{F} : \alpha \to \mathcal{P}^M(\lambda)$ avec $\forall \xi < \alpha$, $f(\xi) \in F(\xi)$ et $M \models \forall \xi < \alpha\ |F(\xi)| < \kappa$.
Soit alors dans M : $I = \bigcup_{\xi < \alpha} F(\xi)$, $I \subseteq \lambda$ il y a alors 2 cas possibles :

* $\lambda = \kappa$ $|I| = \sum_{\xi<\alpha} |F(\xi)| < \kappa$ car κ est régulier et $\alpha < \lambda = \kappa$
* $\lambda > \kappa$ on a $|I| \le \max(|\alpha|, \kappa) < \lambda$ (car $|F(\xi)| < \kappa$)

Dans les deux cas, $|I| < \lambda$ et comme $\mathrm{Im}(f) \subseteq I$, f ne peut être surjective. ☒

Corollaire : Si $\mathbb{P} \in M$ a la CCD dans M, $\mathbb{P}$ préserve les cardinaux

• Falsification de HC

On va voir que dans certains cas $\mathbb{P}_{AB}$ préserve les cardinaux et cela va nous servir à falsifier HC.

Théorème : Si B est dénombrable, $\mathbb{P}_{A,B}$ a la CCD.

Preuve : On suppose que $F \subseteq \mathbb{P}_{AB}$ est une antichaîne de taille $\aleph_1$. et soit $E = \{ dom(s), s \in F \}$, clairement $|E| = \aleph_1$.
Par le lemme du Δ-système (p 147) soit $\mathcal{S} \subseteq E$ un Δ système de racine $R \subseteq A$ avec $|\mathcal{S}| = \aleph_1$. On pose alors $\overline{F} = \{ s \in F, dom(s) \in \mathcal{S} \}$ on a alors $|\overline{F}| = \aleph_1$.
Soient $s_1, s_2 \in \overline{F}$, on a $s_1 \perp s_2$ alors $s_1|_{dom(s_1) \cap dom\, s_2} \neq s_2|\ldots$ et donc $s_1|_R \neq s_2|_R$ donc l'ensemble $\{ s|_R \mid s \in \overline{F} \}$ est un ensemble de $\aleph_1$ fonctions de $R \to B$ sachant que B^R est de cardinal $\aleph_0$ c'est absurde, en effet R est fini puisque tous les domaines sont finis. ☐

Corollaire : Soient $A, B \in M$ avec $M \models |B| \leq \aleph_0$ alors $\mathbb{P}_{A,B}$ préserve les cardinaux.

Enfin, le théorème qui va rendre tout ça possible :

Théorème : Soit $\alpha \in Ord^M$, $\kappa = \aleph_\alpha^M$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\kappa \times \omega, 2}$.
Soit G un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M.
Alors
$$M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \kappa$$
i.e.
$$M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_\alpha$$

En particulier, pour $\alpha \geq 2$ on voit que $M[G] \models \neg HC$.
Preuve : L'idée est de montrer qu'il existe dans $M[G]$ une injection de κ dans $\mathcal{P}(\omega)$.
Par le théorème précédent comme $\mathbb{P}_{\kappa \times \omega, 2}$ préserve les cardinaux les cardinaux de M et de $M[G]$ sont les mêmes, et comme

$\kappa = \aleph_\alpha^M$, $M \models$ " κ est le α ième cardinal" et donc $M[G] \models$ " κ est le α-ième cardinal", et donc $\aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha^{M[G]}$.

Soit $f_G = \bigcup G$ $f_G : \kappa \times \omega \to 2$ est une fct de $M[G]$ qui est totale. On pose alors pour $\xi < \kappa$

$$a_\xi = \{ n < \omega,\ f_G(\xi, n) = 1 \}$$

La fonction $a : \kappa \to \mathcal{P}(\omega)$ est dans $M[G]$ et on va montrer que a est injective.

Soient $\xi \neq \eta < \kappa$ et on pose

$$D_{\xi,\eta} = \{ s \in \mathbb{P} \mid \exists k \ (((\xi, k), (\eta, k)) \in \mathrm{Dom}\, s \ \& \ s(\xi, k) \neq s(\eta, k) \}$$

Clairement $D_{\xi,\eta} \in M$. Montrons que $D_{\xi,\eta}$ est dense dans $\mathbb{P}$, soit donc $p \in \mathbb{P}$, dom p est fini, on peut alors k tel que k n'est pas dans la projection sur ω de dom p et on étend p en s avec $s = p \cup \{ (\xi, k, 0) ; (\eta, k, 1) \}$, on a alors $s \leq p$ et $s \in D_{\xi,\eta}$.

Par généricité de G, $G \cap D_{\xi,\eta} \neq \emptyset$ donc il existe k tel que $f_G(\xi, k) \neq f_G(\eta, k)$, ie $a_\xi \neq a_\eta$.

$a : \kappa \to \mathcal{P}(\omega)$ est totale et injective, par conséquent

$$M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_\alpha$$ ☒

On a donc que pour le bon G l'hypothèse du continu n'est pas vérifiée dans $M[G]$, ie on peut rendre $2^{\aleph_0}$ aussi grand que l'on veut, mais on ne sait toujours pas quelle valeur il prend, on va à présent montrer qu'on peut lui faire prendre presque toutes les valeurs possibles.

• Valeur de $2^{\aleph_0}$

Soit $A \subseteq \mathbb{P}$, on pose $D_A := \{ p \in \mathbb{P},\ \exists q \in A,\ p \leq q \} \supseteq A$.

Proposition : • Si $A \subseteq \mathbb{P}$ est une antichaîne maximale, alors D_A est dense dans $\mathbb{P}$.

• Si $D \subseteq \mathbb{P}$ est dense, $A \subseteq D$ une antichaîne maximale dom D, alors A est maximale (dom $\mathbb{P}$).

Preuve : • Soit $p \in \mathbb{P}$, il existe par maximalité $r \in A$ tq $p \not\perp r$ donc il existe q, $q \leq p$ et $q < r$ et donc $q \in D_A$.

• Si A n'est pas maximal dans $\mathbb{P}$, elle n'est pas maximal dans D car si $\exists p \in A, q \in \mathbb{P}$ tq $\exists r \in \mathbb{P}$ $r \underset{\leq q}{\leq p}$ alors $\exists r' \leq r$ $r' \in D$ tq $r' \underset{\leq q}{\leq p}$ donc A n'est pas max dans D ☒

Proposition : [AC] $\mathbb{P} \in M$ $G \subseteq \mathbb{P}$ alors

G est $\mathbb{P}$-générique sur M ssi G rencontre toutes les antichaînes maximales de $\mathbb{P}$ qui sont dans M.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ $A \in M$ une antichaîne maximale, D_A est dense et $\in M$, donc $G \cap D_A \neq \emptyset$ donc $G \cap A \neq \emptyset$ (car G stable par au-dessus).

$\boxed{\Leftarrow}$ Si G rencontre les antichaînes maximales de M et soit D $\in M$ dense. Par le lemme de Zorn on construit $A \subseteq D$ une antichaîne maximale et par la proposition précédente A est maximale dans $\mathbb{P}$ donc $G \cap A \neq \emptyset$ et de $G \cap D \neq \emptyset$ ☒

Définition : Soient $p \in \mathbb{P}$, $E \subseteq \mathbb{P}$, E est <u>dense sous p</u> si $\forall q \leq p$ il existe $q' \in E$ tq $q' \leq q$.

Proposition : Soit G un filtre $\mathbb{P}$ générique sur M et soit $p \in \mathbb{P}$, $E \in M$ dense sous p. Si $p \in G$, alors $G \cap E \neq \emptyset$.

Preuve : On pose $E^+ = \overset{(1)}{\{q \in \mathbb{P} \mid q \perp p\}} \cup \overset{(2)}{E}$ on a alors que E^+ est dense et donc $G \cap E^+$ est $\neq \emptyset$ et comme tout élément de G est compatible avec p, G ne s'intersecte pas avec (1) mais avec (2). ☒

Lemme : Soit $S \subseteq \mathbb{P}$ un segment initial, $S \in M$ et G un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M.

(1) Soit $E \subseteq S$ dense dans S, $E \in M$. Si $G \cap S \neq \emptyset$ alors $G \cap E \neq \emptyset$.

(2) Soit $A \subseteq S$ une antichaîne maximale dans S. Si $G \cap S \neq \emptyset$ alors $G \cap A \neq \emptyset$.

Preuve : (1) Pour $p \in G \cap S$ (non vide car S segment initial et G filtre) on a que E dense sous p on conclut par la proposition précédente.
(2) Par la proposition p. D_A est dense dans S donc par (1), $G \cap D_A \neq \emptyset$ et donc $G \cap A \neq \emptyset$ ☒

Théorème : Soit M un modèle transitif dénombrable de $ZFC + HGC$. Soit κ un cardinal de M tel que $M \models Cof(\kappa) > \aleph_0$ et soit $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\kappa \times \omega, 2}$.
Alors pour tout filtre G $\mathbb{P}$-générique sur M, M et $M[G]$ contiennent les mêmes cardinaux et $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa$.

Remarque : On a que $Cof(2^{\mu}) > \mu$ dans tout modèle de ZFC, ce théorème dit donc que c'est la seule contrainte sur les valeurs possibles de $2^{\aleph_0}$. En particulier $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Preuve : On montre que $|P(\omega)| \leq \kappa$. Pour cela on va construire un ensemble $\mathcal{T}$ de termes $\mathcal{T} \in M$ tel que $(|\mathcal{T}| = \kappa)^M$, $M[G] \models \{\tau^G \mid \tau \in \mathcal{T}\} = \mathcal{P}(\omega)$. La fonction $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$, $\tau \longmapsto \tau^G$ ($\subseteq M[G]$) sera donc la surjection étant définie.

Pour deux termes σ, τ, on note $\tau_\sigma = \{p \in \mathbb{P} \mid (\sigma, p) \in \tau\}$

On définit
$$\mathcal{T} := \left\{ \tau \in M^{\mathbb{P}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{dom} \tau \subseteq \{\check{n} \mid n \in \omega\} \\ \text{et } \forall n < \omega \;\; \tau_{\check{n}} \text{ est une antichaîne de } \mathbb{P} \end{array} \right\}$$

Remarquons que tout est exprimable donc $\tilde{T} \in M$.

- $\underline{M \models |\tilde{T}| = \kappa}$: tout $\tau \in \tilde{T}$ M s'identifie avec (car $\tau = \{(\check{n}, p),\ p \in \tau_{\check{n}},\ n \in \omega\}$) $(\tau_{\check{n}})_{n\in\omega}$ où chaque $\tau_{\check{n}}$ est une antichaîne de $\mathbb{P}$ donc $\tau_{\check{n}}$ est dénombrable car $\mathbb{P}$ a la CCD (les antichaînes ne sont pas trop grandes), donc $\tilde{T}$ s'identifie à une partie de $\left(\mathcal{P}_{den}(\mathbb{P})\right)^{\omega}$, sachant que $|\mathbb{P}| = \kappa$. On a donc que

$$|\tilde{T}| \leq |\mathcal{P}_{den}(\kappa)^{\omega}| = \left(\kappa^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} \quad \text{or on a que}$$

$$\lambda^{\aleph_0} = \lambda \quad \text{si } cof(\lambda) > \aleph_0$$

donc $|\tilde{T}| \leq \kappa$ et donc $|\tilde{T}| = \kappa$.

- $\underline{M[G] \models \mathcal{P}(\omega) = \{\tau^G \mid \tau \in \tilde{T}\}}$

$\supseteq$: si $\tau \in \tilde{T}$ par déf. $\operatorname{dom} \tau \subseteq \{\check{n},\ n \in \omega\}$ et donc

$$\tau^G \subseteq \{\check{n}^G,\ n \in \omega\} = \omega.$$

$\subseteq$: Soit $a \subseteq \omega$, $a = \kappa^G$ avec $\kappa \in M^{\mathbb{P}}$.

Soit alors $\hat{\alpha} := \{(\check{n}, p) \mid p \Vdash \underset{\check{n} \in_p \kappa}{\check{n} \in \kappa}\}$ on a clairement $M[G] \models \hat{\alpha}^G = \kappa^G$

On a alors $\hat{\alpha}_{\check{n}}$ est un segment initial de $\mathbb{P}$ car si $(\check{n}, p) \in \hat{\alpha}$, $(\check{n}, q) \in \hat{\alpha}\ \forall q \leq p$.

On pose ensuite $\tilde{\alpha} = \bigcup_{n \in a} \{\check{n}\} \times A_n$ où avec AC, A_n est $\subseteq \hat{\alpha}_{\check{n}}$ une antichaîne maximale dans $\hat{\alpha}_{\check{n}}$, on a $\tilde{\alpha} \in \tilde{T}$.

Par le lemme précédent on a que $\tilde{\alpha}^G = \hat{\alpha}^G$ car $G \cap A_n$ est non vide. On a donc $\tilde{\alpha}^G = a$ avec $\tilde{\alpha} \in \tilde{T}$ ce qui conclut $\square$

$\underline{\text{N.B.}}$ Dans le second point on a besoin que l'antichaîne soit maximale pour intersecter G. Ce prend donc $a \subseteq \omega$ et on construit $\tilde{\alpha}$ tq les $\tilde{\alpha}_{\check{n}}$ sont des antichaînes maximales et par le lemme on a $\tilde{\alpha}^G = a$. Mais alors la déf de $\tilde{T}$ par besoin de <u>max</u>.

<u>NB</u>: Le résultat $cof(\lambda) > \aleph_0 \Rightarrow \lambda^{\aleph_0} = \lambda$ est vrai <u>sous HGC</u> c'est pourquoi on demande $M \models ZFC + HGC$

Un modèle de ZF + ¬AC par forcing

On a vu que les modèles de Fraenkel-Mostowski permettent fournir des modèles de ¬AC. On va à présent en construire un par forcing. Pour démontrer ¬AC il suffit d'avoir $\neg AC_\omega$, or celui-ci est équivalent à ce que ω s'injecte dans tout ensemble infini. On va donc construire un modèle N tel que il existe un $C \in N$ infini avec ω ne s'injectant pas dans N.

On étudie d'abord la notion d'isomorphisme de notion de forcing.

• Isomorphisme de Forcing

Définition : Si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont deux notions de forcing, un isomorphisme de notion de forcing $\overset{\in V}{\pi} : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ est simplement un isomorphisme de préordre. On a $\pi(1\!\!1_{\mathbb{P}}) = 1\!\!1_{\mathbb{Q}}$.
Si $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$, on définit par récurrence bien fondée π^*

$$\pi^* : V^{\mathbb{P}} \to V^{\mathbb{Q}} \qquad \pi^*(\tau) = \{(\pi^*(\sigma), \pi(p)) \mid (\sigma, p) \in \tau\}$$

Il se trouve que la façon d'étendre π en π^* se fait de même du monde :

Propriétés :

(1) π^* est une fonctionnelle bijective
(2) π^* est Δ^{ZF}_1 donc absolue.
(3) Si M est un modèle transitif $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{Q} \in M$ alors $\pi^* : M^{\mathbb{P}} \to M^{\mathbb{Q}}$ est bijective.
(4) $\pi^*(\check{x}_{\mathbb{P}}) = \check{x}_{\mathbb{Q}} \quad \forall x \in M$.

Preuve : Simple travail de vérification. ∎

Il s'avère que la structure $M[G]$ elle-même se comporte bien par isomorphisme :

Proposition : Si $\pi : \mathbb{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \in M$ alors

(1) G est $\mathbb{P}$-générique sur M ssi $\pi[G]$ est $\mathbb{Q}$-générique sur M

(2) $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ et si G est un filtre dans $\mathbb{P}$, alors
$$\tau^G = \pi^*(\tau)^{\pi[G]}$$

(3) $$M[G] = M[\pi[G]]$$

Preuve : (1) π envoie les parties denses de $\mathbb{P}$ sur les parties denses de $\mathbb{Q}$

(2) Par récurrence bien fondée : si $\forall \sigma \in_p \tau$, $\sigma^G = \pi^*(\sigma)^{\pi[G]}$ alors $\tau^G = \{\sigma^G, \exists p \ \sigma \in_p \tau\}$. Si $\sigma^G \in \tau^G$, on a $\sigma^G = \pi^*(\sigma)^{\pi[G]}$ et $\sigma' := \pi^*(\sigma)$ vérifie $\exists p'$ tq $(\sigma', p') \in \pi^*(\tau)$ et $p' \in \pi[G]$ donc $\sigma^G \in \pi^*(\tau)^{\pi[G]}$. La réciproque se fait en utilisant π^{-1}.

(3) Soit $h \in M[G]$, $h = \tau^G = \pi^*(\tau)^{\pi[G]}$ et $\pi^*(\tau) \in M^{\mathbb{Q}} \subseteq M$ et donc $\pi^*(\tau)^{\pi[G]} \in M[\pi[G]]$ ie $h \in M[\pi[G]]$ alors $M[G] \subseteq M[\pi[G]]$ et la réciproque avec π^{-1}. ∎

Proposition : Si $\pi : \mathbb{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \in M$, $\tau_1 \dots \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$, $p \in \mathbb{P}$

alors $$p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \text{ ssi } \pi(p) \Vdash \varphi(\pi^*(\tau_1), \dots, \pi^*(\tau_n))$$

Preuve : Si $p \Vdash \varphi(\tau_1 \dots \tau_n)$. Soit $H \subseteq \mathbb{Q}$ un filtre $\mathbb{Q}$-générique sur M contenant $\pi(p)$. Alors $\pi^{-1}[H]$ est un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M contenant p donc $M[\pi^{-1}[H]] \models \varphi(\tau_1^{\pi^{-1}(H)} \dots \tau_n^{\pi^{-1}(H)})$ et par la proposition précédente $M[H] \models \varphi(\tau_1^{\pi^{-1}(H)} \dots \tau_n^{\pi^{-1}(H)})$ et comme par la prop précédente $\tau_i^{\pi^{-1}(H)} = \pi^*(\tau_i)^H$ on a donc $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ est par symétrie. ∎

• Construction du modèle N :

On prend $M \models ZF + (V = \mathbb{L})$, M transitif dénombrable et soit $\vartheta \in Ord^M$ un ordinal infini.
Soit $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\vartheta \times \omega, 2}$ et G un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M.
On dispose dans $M[G]$ de la fonction totale injective

$$f_G : \vartheta \times \omega \longrightarrow 2$$

ainsi que d'une suite de $P(\omega)$:

$$s_\xi := \{ i < \omega \mid f_G(\xi, i) = 1 \} \qquad \xi < \vartheta$$

On remarque que f_G et $(s_\xi)_{\xi < \vartheta}$ sont interdéfinissables.

On pose $C := \{ s_\xi \mid \xi < \vartheta \}$, $C \in M[G]$.
On définit ensuite dans $M[G]$: $N := \mathbb{L}^{(M[G])}(C)$

On rappelle que $\mathbb{L}_0(C) = C$ et $\mathbb{L}_{\alpha+1}(C) = Def(\mathbb{L}_\alpha(C))$, et que si C est transitif, $\mathbb{L}(C) \models ZF$. Or ici C n'est pas nécessairement transitif, par contre $\hat{C} = C \cup \omega$ l'est puisque $s_\xi \subseteq \omega$ $\forall \xi < \vartheta$. De plus $\hat{C}$ et C sont interdéfinissables, donc $\mathbb{L}(\hat{C}) = \mathbb{L}(C)$ et on a bien que $N \models ZF$.

Par la preuve du théorème p 150, les s_ξ sont des parties distinctes de ω et C est infini. De plus $\underset{\mathbb{L}}{M} \underset{s_\xi \in N}{\subsetneq} N \subseteq M[G]$

On va montrer que dans N, C n'admet pas de bon ordre.
Notez que comme N est construit à partir de l'ensemble $\{s_\xi, \xi < \vartheta\}$ on perd cet étiquetage bien ordonné dans N.

On utilise le résultat suivant (prouvé dans le BM)

Théorème : Soit S transitif alors il existe une fonctionnelle injective $G_S : Ord \times S^{<\omega} \longrightarrow \mathbb{L}(S)$ définissable dans $\mathbb{L}(S)$ avec seul paramètre S. En particulier tout élément de $\mathbb{L}(S)$ est (uniformément) définissable avec paramètres dans $On \cup S^{<\omega} \cup \{S\}$

On rappelle que $\bar{a}$ est définissable dans $\mathcal{A}$ avec paramètre $\bar{u} \in \mathcal{A}$
si $\exists \varphi \quad \mathcal{A} \models \forall v \ (v = \bar{a} \text{ ssi } \varphi(v, \bar{u}))$.

On a donc que tout élément de N est définissable à paramètre dans $\mathrm{Ord} \cup C^{<\omega} \cup \{C\}$.

• $N \models \neg AC_\omega$

<u>Proposition</u> : Aucun élément $s \in C$ n'est définissable dans $M[G]$ avec paramètre dans $M \cup (C \setminus \{s\}) \cup \{C\}$

<u>Preuve</u> : Pour $\xi < \vartheta$ on pose $\tau_\xi = \left\{ (\check{k}, p) \mid p \in \mathbb{P},\ (\xi, k) \in \mathrm{dom}(p) \text{ et } p(\xi, k) = 1 \right\}$

et soit $\Gamma = \left\{ (\tau_\xi, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}) \mid \xi < \vartheta \right\}$

On vérifie que $\tau_\xi^{G} = s_\xi$ et $\Gamma^G = C$. (En fait τ_ξ devient l'ensemble $\{ (\check{k}, p),\ p \in \mathbb{B},\ f_G(\xi, k) = 1 \}$ mais $f_G \notin M$ (et G non plus)). (pour simplifier la notation)

Par voie de contradiction on suppose qu'un élément de C noté s_n est définissable avec paramètre $a \in M$, $s_0 \ldots s_{n-1} \in C$ et C
donc on a une formule φ tq

$$M[G] \models \forall v \ (v = s_n \leftrightarrow \varphi(v, s_0, \ldots, s_{n-1}, a, C)).$$

Par LV soit $p \in G$ tel que :

$$p \Vdash \forall v \ (v = \tau_n \leftrightarrow \varphi(v, \tau_0 \ldots \tau_{n-1}, \check{a}, \check{C})). \quad (\dagger)$$

Soit donc $\zeta < \vartheta$ avec $\zeta > n$ et " p ne mentionne pas ζ "
ie $\forall i < \omega \ (\zeta, i) \notin \mathrm{dom}\, p$. Soit $\pi_0 : \vartheta \to \vartheta$ la transposition qui échange n et ζ : $\pi_0(n) = \zeta$, $\pi_0(\zeta) = n$ et $\pi_0(\xi) = \xi \quad \forall \xi < \vartheta \quad \xi \neq n, \zeta$.

On pose
$$\pi_1 : \vartheta \times \omega \longrightarrow \vartheta \times \omega$$
$$(\xi, i) \longmapsto (\pi_0(\xi), i)$$

et enfin
$$\pi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$
$$p \longmapsto p \circ \pi_1$$

— ie $\pi(p)((\xi, i)) = p(\pi_0(\xi), i)$

On a alors que π est un automorphisme de $\mathbb{P}$ et que $\pi \in M$. On étend alors π en $\pi^* : M^{\mathbb{P}} \to M^{\mathbb{P}}$ et on vérifie que $\pi^*(\sigma_n) = \sigma_\xi$, $\pi^*(\sigma_\xi) = \sigma_n$, $\pi^*(\sigma_\zeta) = \sigma_\zeta$ $\forall \zeta \neq n, \xi$, que $\pi^*(\Gamma) = \Gamma$ et que $\pi^*(\check{a}) = \check{a}$.

On déduit alors de $(\dagger)$ que

$$\pi(p) \Vdash \forall v \, (v = \sigma_\xi \leftrightarrow \varphi(v, \sigma_0 \dots \sigma_{n-1}, \check{a}, \Gamma)) \quad (\ddagger)$$

On a de plus que p et $\pi(p)$ sont compatibles car p ne mentionne pas ξ et π échange ξ et n, donc on peut poser $q := p \cup \pi(p)$, $q \leq p$ et $q \leq \pi(p)$, et de $(\ddagger)$ et $(\dagger)$ on a que

$$q \Vdash \forall v \, (v = \sigma_\xi \leftrightarrow v = \sigma_n)$$

donc $q \Vdash \sigma_\xi = \sigma_n$ ce qui est une contradiction car σ_ξ^G sont bien distincts. ∎

Corollaire : Aucun élément $a \in C$ n'est définissable dans N avec paramètres dans $M \cup (C \setminus \{a\}) \cup \{C\}$.

Preuve : Une définition dans N donnerait une définition dans $M[a]$. ∎

On est à présent sur le point de pouvoir montrer que $N \models \neg AC_\omega$. On note II_ω l'énoncé "$\forall X$, X infini $\Rightarrow$ il existe une injection de ω dans X".

Théorème : $N \models$ "C est infini et il n'existe pas d'injection $h : \omega \to C$"

Donc $N \models \neg \mathrm{II}_\omega$ et a fortiori $N \models \neg AC_\omega$.

Preuve : On a déjà que $N \models$ "C est infini". On suppose qu'il existe $h \in N$ $h : \omega \to C$ injection.

Comme par le théorème p 157 on dispose de

$$G_C : \mathrm{Ord} \times C^{<\omega} \twoheadrightarrow N$$

On a donc $h = \Phi_C(\xi, \bar{t})$ pour $\xi \in \mathrm{Ord}$, $\bar{t} \in C^{<\omega}$ et donc h est définissable dans N avec paramètres $\{\xi\} \cup \{t_0 \dots t_k\} \cup \{C\}$. Comme C est infini, soit $i_0 \in \omega$ tel que $h(i_0) \in C \setminus \{t_0 \dots t_k\}$, notons $s = h(i_0)$. s est alors définissable dans N à partir de h et i_0 donc à partir de $\{\xi\} \cup \{t_0 \dots t_k\} \cup \{C\} \subseteq \{\xi\} \cup \{C\} \cup C \setminus \{s\}$ ce qui contredit le résultat précédent ▪

Un modèle de ZF + HC par forcing

La grande diversité des modèles de forcing a cette particularité : ils permettent de résoudre ou d'omettre HC. On a falsifié HC à la section p.153 on va à présent exhiber un modèle où HC sera confirmé.

• Forcing κ-clos

On introduit la notation $\mathbb{P}_{A,B,\kappa} = \{ s : A \xrightarrow[\text{Partiel}]{} B \text{ fct partiel avec } |s| < \kappa \}$

On a $\mathbb{P}_{A,B} = \mathbb{P}_{A,B,\aleph_0}$.

Définition : Soit $\mathbb{P}$ une notion de forcing, κ un cardinal. On dit que $\mathbb{P}$ est κ-close si $\forall \lambda < \kappa$ toute suite descendante $(p_\xi)_{\xi<\lambda}$ $p_{\xi+1} \leq p_\xi$ de $\mathbb{P}$ possède un minorant. On dit que $\mathbb{P}$ est dénombrablement clos pour $\kappa = \aleph_1$.

Proposition [AC] Pour tout cardinal régulier κ, $\mathbb{P}_{A,B,\kappa}$ est κ-clos.

Preuve : Soit $(p_\xi)_{\xi<\lambda}$ une suite décroissante de condition avec $\lambda < \kappa$. Et soit $q := \bigcup_{\xi<\lambda} p_\xi$ et $|q| < \kappa$ car sinon $\xi \mapsto |q_\xi|$ serait cofinale dans κ. et donc $q : A \xrightarrow[p]{} B$ avec $|q| < \kappa$ donc $q \in \mathbb{P}_{A,B,\kappa}$ et minore $(p_\xi)_{\xi<\lambda}$ ∎

• Propriété de Baire

Définition : $D \subseteq \mathbb{P}$ est ouvert si $p \in D$ et $q \leq p$ alors $q \in D$, autrement dit D est un segment initial de $\mathbb{P}$.

Proposition [AC] : Soit $\mathbb{P}$ une notion de forcing κ-close, $\kappa \geq \aleph_0$.

Alors pour toute suite $(D_\xi)_{\xi<\lambda}$ où $\lambda < \kappa$ d'ouvert dense de $\mathbb{P}$
$D_\infty := \bigcap_{\xi<\lambda} D_\xi$ est un ouvert dense.

Preuve : D_∞ est facilement ouvert. Soit $p \in \mathbb{P}$. Soit $p_0 \in D_0$ tel que $p_0 \leq p$. Par récurrence si $p_\alpha^{\in D_\alpha}$ est construit on dispose donc de $(p_\xi)_{\xi<\alpha}$ $\alpha < \lambda < \kappa$. Par κ-clôture, il existe $q \leq p_\xi^{\in \mathbb{P}}$ $\forall \xi < \alpha$. On choisit ensuite par densité de D_α $p_\alpha \leq q$, on construit ainsi une suite

suite $(p_\xi)_{\xi<\nu}$ qui, comme $\nu < \kappa$ est par κ-clôture, est minorée dans $\mathbb{P}$ et par ouverture des D_α, chaque $p_\alpha \in D_\beta$ $\forall \beta \leq \alpha$. On conclut que le minorant de la suite est dans D_∞ ☒

• Un modèle de HC

Théorème: Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal de M. $\mathbb{P} \in M$ telle que $M \models$ "$\mathbb{P}$ κ-clos".
G un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M.
On suppose que $h \in M[G]$ avec
$h : \nu \to M$, $\nu < \kappa$. Alors $h \in M$.

Preuve: L'image de h est un ensemble, $A \in M$, $h : \nu \to A$. (regarder l'image de h dans $M \subseteq M[G]$ et le rang de cette image, $A = V_\alpha^M$).
Soit $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ avec $\tau^G = h$, $p_0 \in G$ tel que $p_0 \Vdash$ "$\tau : \check{\nu} \to \check{A}$" par LV.
Pour $\xi < \nu$ $D_\xi := \{ r \in \mathbb{P} \mid r \leq p_0$ et $\exists a \in A$ $(r \Vdash^M_{\mathbb{P}} \tau(\check{\xi}) = \check{a})\}$
r détermine la valeur de τ en ξ. Mq D_ξ ouvert dense sous p_0. En effet c'est clairement un ouvert. Soit $q \leq p_0$, Mq $\exists r \in D_\xi$ $r \leq q$.
On a que $q \Vdash$ "$\tau : \check{\nu} \to \check{A}$" soit H un filtre $\mathbb{P}$-générique contenant q, $M[H] \models \tau^H : \nu \to A$, soit $a \in A$ $a = \tau^H(\xi)$ $M[H] \models \tau^H(\check{\xi}^H) = \check{a}^H$
et par LV il existe $r \in H$ avec $r \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{a}$. Comme $q \in H$ et H est un filtre on peut prendre $r \leq q$ et donc $r \in D_\xi$, D_ξ est dense sous p_0. La propriété de Baire (réadaptée à "dense sous p_0")
nous dit que $D_\infty = \bigcap_{\xi<\nu} D_\xi$ est dense sous p_0 et comme $p_0 \in G$, par la proposition p.152 $D_\infty \cap G \neq \emptyset$. Soit donc $r \in G \cap D_\infty$
on a alors que $h(\xi) =$ l'unique $a \in A$ tq $r \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{a}$
et par LD, c'est exprimable dans M donc $h \in M$ ☒

Corollaire: Soit $\mathbb{P} \in M$, κ un card de M $M \models$ "$\mathbb{P}$ est κ-clos".
Alors $\forall \nu < \kappa$, M et $M[G]$ ont les mêmes fonctions de domaine ν donc le forcing avec $\mathbb{P}$ préserve les cardinaux et la cofinalité $\leq \kappa$.

Théorème : Il existe un $\mathbb{P} \in M$ tel que pour tout filtre G $\mathbb{P}$-générique sur M, $M[G] \models HC$

Preuve : Soit $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_{\omega_1, \mathcal{P}(\omega), \aleph_1})^M$ et G un filtre $\mathbb{P}$-générique sur M. On a que $f_G = \bigcup G : \omega_1^M \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)^M$ est une surjection. Or par le résultat précédent, $\mathbb{P}$ est $\aleph_1$-clos donc par le résultat précédent il n'y a pas de nouvelle surjection $\omega \longrightarrow \omega_1$ donc $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ et de même $\mathcal{P}(\omega)^M = \mathcal{P}(\omega)^{M[G]}$. Il s'ensuit que

$$M[G] \models \text{“} f_G : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\omega) \text{”}$$ et donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ☒

• Sur l'hypothèse généralisée du continu :

Proposition : On suppose que $M \models ZFC + HGC$. Soient $\lambda, \kappa \in Card^M$ avec $M \models$ “λ régulier et $\lambda < cof(\kappa)$”. Posons $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\kappa\times\lambda, 2, \lambda}$ (cette notion de forcing permet de rajouter κ parties à λ) Alors

(1) $M \models |\mathbb{P}| = \kappa$

(2) $M \models$ “$\mathbb{P}$ est λ-clos”

(3) $M \models$ “$\mathbb{P}$ a la λ^+-cc”

Preuve : (1) Dans M : $s \in \mathbb{P} \Rightarrow s \in \mathcal{P}_{<\lambda}(\kappa \times \lambda \times 2) \sim \mathcal{P}_{<\lambda}(\kappa) \sim \kappa$.

(2) Pour $\nu < \lambda$, la réunion d'une ν-suite est une condition car $\lambda < cof\ \kappa$.

(3) non trivial et admis, utilise $M \models HGC$. ☒

Théorème : On suppose $M \models ZFC + HGC$, $\lambda, \kappa \in Card^M$, $M \models$ “λ régulier et $cof(\kappa) > \lambda$”. Soit $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\kappa\times\lambda, 2, \lambda}$
alors • $M[G]$ et M ont les mêmes cardinaux et cofinalités.
• $M[G] \models 2^\lambda = \kappa$.

Preuve : Comme $\mathbb{P}$ est λ-clos les cardinaux et cofinalités $\leq \lambda$ sont conservés ; comme $\mathbb{P}$ a la λ^+-cc les cardinaux et cofinalités $\geq \lambda^+$ sont conservés, cela donne le premier point.

Pour $2^\lambda \geq \kappa$: on dispose de $f_G : \kappa \times \lambda \to 2$, on pose

$a_\xi = \{\eta < \lambda \mid f_G(\xi, \eta) = 1\}$, alors $a : \kappa \to P(\lambda)$ est injective

en effet on utilise la généricité de G ;

Soit $\alpha, \beta < \kappa$, $\alpha \neq \beta$ on pose $D_{\alpha,\beta} = \left\{ s \in \mathbb{P} \mid \exists \eta^{<\lambda},\ (\alpha, \eta) \text{ et } (\beta, \eta) \in \mathrm{dom}\, s \text{ et } s(\alpha, \eta) \neq s(\beta, \eta) \right\}$

On montre que $D_{\alpha,\beta}$ est dense dans $\mathbb{P}$.

En effet si $p \in \mathbb{P}$, $|\mathrm{dom}\, p| < \lambda$ on peut donc prendre $\eta \notin \mathrm{proj}_\lambda(\mathrm{dom}\, p)$

et étendre p en $p \cup \{(\alpha, \eta, 0), (\beta, \eta, 1)\}$ donc $D_{\alpha\beta}$ dense dans $\mathbb{P}$

Par $\mathbb{P}$-généricité de G, $\exists r \in G \cap D_{\alpha\beta}$ et $r \Vdash a_\alpha \neq a_\beta$ donc

$a_\alpha \neq a_\beta$ dans $M[G]$ et la fonction $\begin{array}{l}\kappa \to P(\lambda) \\ \xi \mapsto a_\xi\end{array}$ est une injection, $\kappa \leq 2^\lambda$.

Pour $\kappa \geq 2^\lambda$: c'est comme pour $2^{\aleph_0}$ on définit dans M un ensemble de noms $\tilde{\tau}$ tq $M \models |\tilde{\tau}| = \kappa$ (on utilise la λ^+ cc) et tq $M[G] \models P(\lambda) = \{\tau^G, \tau \in \tilde{\tau}\}$ on trouve alors une surjection $\tau \mapsto \tau^G$ de $\tilde{\tau}$ sur $P(\lambda)$ ∎

Forcing produit

On introduit dans cette section le forcing produit où l'univers résulte d'un forcing où la notion de forcing est le produit de deux notions de forcing dans le sens suivant :

Soient $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ deux notions de forcing, on définit leur **produit** $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ comme le produit cartésien muni de l'ordre

$$(p_1, p_2) \leq (q_1, q_2) \quad \text{ssi} \quad p_1 \leq q_1 \ \& \ p_2 \leq q_2$$

et $1_{\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2} := (1_{\mathbb{P}_1}, 1_{\mathbb{P}_2})$. On note $\pi_i : \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_i$ la projection.

Proposition :
- Si $G \subseteq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ est un filtre alors $\pi_1(G)$ et $\pi_2(G)$ sont des filtres et $G = \pi_1(G) \times \pi_2(G)$.
- Si $G_1 \subseteq \mathbb{P}_1$ et $G_2 \subseteq \mathbb{P}_2$ sont des filtres, alors $G_1 \times G_2$ est un filtre sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$

Preuve : · Pour $\mathbb{P}_1$: soit $p_1 \in \pi_1(G)$, $\exists p_2 \in \mathbb{P}_2$ $(p_1, p_2) \in G$ donc si $q_1 \geq p_1$, $q_1 \in \mathbb{P}_1$, alors $(q_1, p_2) \geq (p_1, p_2)$ donc $(q_1, p_2) \in G$ donc $q_1 \in \pi_1(G)$.

Si $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in G$, $p_1, q_1 \in \pi_1(G)$ et $\exists (r_1, r_2) \in G$ $(r_1, r_2) \leq (p_1, p_2)$ et (q_1, q_2) donc $r_1 \leq p_1$ et $r_1 \leq q_1$ donc $\pi_1(G)$ est un filtre, et de même pour $\pi_2(G)$.

Clairement $G \subseteq \pi_1(G) \times \pi_2(G)$. Si $(p_1, q_2) \in \pi_1(G) \times \pi_2(G)$ donnons par $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in G$. Comme G est un filtre $\exists (r_1, r_2) \in G$. $(r_1, r_2) \leq (p_1, p_2)$ et (q_1, q_2) donc $(r_1, r_2) \leq (p_1, q_2)$. donc $(p_1, q_2) \in G$.

· Si $(p_1, p_2) \in G_1 \times G_2$, $(q_1, q_2) \geq (p_1, p_2)$ alors $q_1 \geq p_1$ et $q_2 \geq p_2$ donc $(q_1, q_2) \in G_1 \times G_2$. Si $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in G_1 \times G_2$ alors $\exists \underset{\in G_1}{r_1} \leq p_1$ et q_1 $\underset{\in G_2}{r_2} \leq p_2$ et q_2 donc $(r_1, r_2) \leq \substack{(p_1, p_2)\\(q_1, q_2)}$ et $r_1, r_2 \in G_i$

Théorème : Soient $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in M$ deux notions de forcing. LASSE

(a) $G \subseteq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ est générique sur M ($G_1 := \pi_1(G)$, $G_2 = \pi_2(G)$)

(b) G_1 est $\mathbb{P}_1$-générique sur M et G_2 est $\mathbb{P}_2$-générique sur $M[G_1]$

(c) G_2 est $\mathbb{P}_2$-générique sur M et G_1 est $\mathbb{P}_1$-générique sur $M[G_2]$

Preuve : On montre (a) $\Leftrightarrow$ (b) et cela suit par symétrie, car $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \simeq \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_1$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Pour $G_i := \pi_i(G)$, G_i est un filtre sur $\mathbb{P}_i$.

G_1 est un filtre sur $\mathbb{P}_1$ et soit $D \in M$ $D \subseteq \mathbb{P}_1$ dense. On a alors que $D \times \mathbb{P}_2 \subseteq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ est dense donc $G \cap (D \times \mathbb{P}_2) \neq \emptyset$ et donc $D \cap G_1 \neq \emptyset$.

Montrons que G_2 est $\mathbb{P}_2$-générique sur $M[G_1]$: Soit $D \subseteq \mathbb{P}_2$ $D \in M[G_1]$ ($\mathbb{P}_2 \in M \subseteq M[G_1]$) D dense dans $\mathbb{P}_2$. On a $D \in M[G_1]$ donc soit $S \in M^{\mathbb{P}_1}$ tel que $S^{G_1} = D$ on a $M[G_1] \models$ "S est dense dans $\mathbb{P}_2$" dans $\mathbb{P}_1$ ($\in M \subseteq M[G_1]$), donc il existe $p_1 \in G_1$ tq $p_1 \Vdash$ "S est dense dans $\mathbb{P}_2$"

Soit $D^+ = \{ (p,q) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2,\ p \leq p_1 \ \&\ p \Vdash \check{q} \in S \}$

Mq D^+ est dense dans $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ sous $(p_1, 1\!\!1_{\mathbb{P}_2})$.

Soit $(q_1, q_2) \leq (p_1, 1\!\!1)$, $q_1 \leq p_1$ donc $q_1 \Vdash_{\mathbb{P}_1}$ "S dense dans $\check{\mathbb{P}}_2$"

donc $q_1 \Vdash \exists x \in S\ x \leq \check{q}_2$ puis $q_1 \Vdash \check{q}_2 \in \check{\mathbb{P}}_2$ | on a $p \Vdash \exists x\, \varphi(x)$ $\Rightarrow \exists q \leq p\ \exists \sigma$ $\mathbb{P}$-nom $q \Vdash \varphi(\sigma)$

et donc par un $r_2 \in \mathbb{P}_2$, $r_1 \Vdash r_2 \in S \wedge r_2 \leq \check{q}_2$

en prenant $r_1 = q_1$ on a $(r_1, r_2) \in D^+$ et $(r_1, r_2) \leq (q_1, q_2)$ donc D^+ dense.

Comme G est $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$-générique sur M, $G \cap D^+ \neq \emptyset$ soit donc $(p,q) \in G \cap D^+$ on a $p \leq p_1$, $p \Vdash \check{q} \in S$ et comme $p \in G_1$, on a $q \in S^{G_1} = D$ et $q \in G_2$ car $(p,q) \in G$, donc G_2 est $\mathbb{P}_2$-gen sur $M[G_2]$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Soit $D \subseteq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ dense et soit $D_2 = \{ p_2 \in \mathbb{P}_2,\ \exists p_1 \in G_1\ (p_1, p_2) \in D \}$

$D_2 \in M[G_1]$ ~~[illegible]~~ ($G_1 \in M[G_1]$)

D_2 est dense dans $\mathbb{P}_2$: si $q_2 \in \mathbb{P}_2$, $(1\!\!1, q_2) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ [illegible] dense de D et donc D_2 est dense dans $\mathbb{P}_2$. Et comme G_2 est $\mathbb{P}_2$-générique sur $M[G_1]$, $G_2 \cap D_2 \neq \emptyset$ et donc $(G_1 \times G_2) \cap D \neq \emptyset$ et donc G est $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$-générique sur M ☒

Exemple (Réels de Cohen) : Un réel de Cohen est un générique $f : \omega \to 2$. i.e un filtre $\mathbb{P}$-générique de $\mathbb{P}_{\omega,2}$, i.e la donnée d'un $\mathbb{P}_{\omega,2}$ générique $f : \omega \to 2$.

Soit $A_1 = \{\text{entiers pairs}\}$, $A_2 = \{\text{entiers impairs}\}$.

On a alors $f_1 := f_{|A_1} : A_1 \to 2$ $\quad f_2 := f_{|A_2} : A_2 \to 2$

f_1 est $(\mathbb{P}_{A_1,2})$-générique sur M et f_2 est $(\mathbb{P}_{A_2,2})$-générique sur $M[f_1]$

et si $e_1 : \omega \to A_1$, $i \mapsto 2i$ $\quad e_2 : \omega \to A_2$, $i \mapsto 2i+1$

chaque $g_i := f_i \circ e_i : \omega \to 2$ est un réel de Cohen

Et on a $g_2 \notin M[g_1]$, $g_1 \notin M[g_2]$ et $M[g_1] \cap M[g_2] = M$.

Corollaire : Si une des 3 conditions est vérifiée, avec la même notation on a $M[G] = M[G_1][G_2] = M[G_2][G_1]$

Preuve : par minimalité d'extension générique : comme $M \subseteq M[G]$, et $G_1 \in M[G]$, $M[G_1] \subseteq M[G]$ et de même comme $M[G_1] \subseteq M[G]$ et $G_2 \in M[G]$, $M[G_1][G_2] \subseteq M[G]$. Réciproquement, $G = G_1 \times G_2 \in M[G_1][G_2]$ donc comme $M \subseteq M[G_1][G_2]$, $M[G] \subseteq M[G_1][G_2]$ ☒