Introduction en français

Avant propos

Ce manuscrit est organisé comme suit. Les Préliminaires exposent les résultats de base ainsi que quelques lemmes préparatoires. La partie A traite de l'expansion générique d'une structure par un prédicat pour un sous-modèle d'un réduit. Les résultats de la partie A sont issus de mes deuxième, troisième et quatrième années de doctorat, sous la supervision de Thomas Blossier et Zoé Chatzidakis. Deux articles sont disponibles en ligne, non encore publiés. Dans la partie B, nous étudions les expansions du groupe des entiers par des valuations p-adiques. Ce travail fait l'objet d'une publication [AE19], coécrite avec Eran Alouf, dans le Journal of Symbolic Logic. La partie B résulte de ma première année de doctorat, sous la direction de Pierre Simon. Les parties A et B peuvent être lue indépendamment.

On commence par introduire la partie A. Les § 1 et § 2 sont une mise en contexte autour des notions de structures existentiellement closes et d'expansions génériques. Le lecteur familier avec ces notions peut se rendre directement aux § 3 et § 4 où sont exposés nos premiers résultats. Les paragraphes § 5 et § 6 présentent les théories NSOP_1 dans leur contexte historique récent, et le § 7 fait le lien entre le § 3 et ces théories. Le § 8 présente nos résultats concernant ACFG, puis commence l'introduction de la partie B. Le § 9 expose la situation actuelle concernant les expansions du groupe des entiers, les § 10 et § 11 donnent nos résultats sur ce sujet.

§ 1 Structures existentiellement closes

La théorie des modèles étudie les structures mathématiques à travers le prisme de leur algèbre des ensembles définissables. Cette dernière étant en général difficile à appréhender, les théoriciens des modèles ont souvent été en recherche de structures dans lesquelles une description simple des ensembles définissables soit possible. À l'aube de la théorie des modèles, Tarski [Tar51] montre dans les années 30 que la théorie des corps algébriquement clos ACF dans le langage des corps et celle des corps réels-clos RCF dans le langage des corps ordonnés admettent une élimination totale des quantificateurs : étudier les ensembles définissables revient à étudier l'algèbre booléenne engendrée par des ensembles de bases. On déduit facilement du résultat sur ACF le théorème de Chevalley sur les ensembles constructifs ou encore le Nullstellensatz de Hilbert. Robinson donne une preuve élémentaire du dix-septième problème de Hilbert à partir du résultat sur RCF. Ceci marqua le début du développement de méthodes pour montrer l'élimination des quantificateurs, et la seconde moitié du vingt-et-unième siècle fut témoin de nombreux autres résultats similaires, la théorie DCF_0 des corps différentiellement clos de caractéristique nulle [Rob58] [Rob59a] ou encore la théorie $\mathrm{SCF}_{p,e}$ des corps séparablement clos de caractéristique p et de degré d'imperfection e [Ers67] [Del88] ont l'élimination des quantificateurs dans des langages naturels appropriés. Ces deux théories fourniront un cadre adéquat dans la preuve de la conjecture de Mordell-Lang par Hrushovski [Bou+98].

Une élimination complète des quantificateurs n'est pas toujours possible dans un langage naturel, cela mena Robinson à définir la notion de théorie *modèle-complète*, une forme plus faible de l'élimination des quantificateurs, l'élimination jusqu'aux formules *existentielles*. Wilkie [Wil96] montre que la théorie de $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$, le corps des réels augmenté de la fonction exponentielle, est modèle-complète, ce qui entraîne l'o-minimalité $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ et répond partiellement à une question de Tarski [Tar51] : la théorie de $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ est décidable en admettant la conjecture de Schanuel. Il existe néanmoins un langage descriptible dans lequel $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ admet l'élimination des quantificateurs [DMM94], mais celui-ci est compliqué.

Intuitivement, l'élimination des quantificateurs pour une théorie correspond à ce que le langage impose un principe de transfert, un « Nullstellensatz » entre les modèles de la théorie et certaines de leurs extensions (toutes extensions pour l'élimination des quantificateurs, tout surmodèles pour la modèle-complétude). Forcer une structure à satisfaire des principes de transfert devrait résulter en une structure appréhendable. Une structure $\mathcal{M}$ est *existentiellement close* dans une extension $\mathcal{N}$ si toute formule existentielle à paramètres dans $\mathcal{M}$ qui est vraie dans $\mathcal{N}$ l'est aussi dans $\mathcal{M}$. Un corps algébriquement (resp. séparablement) clos est existentiellement clos dans toute extension (resp. extension séparable) de corps. Un modèle d'une théorie T est *existentiellement clos* s'il est existentiellement clos dans tout modèle de T qui l'étend. Si les modèles existentiellement clos d'une théorie T existent et forment une classe élémentaire, leur théorie — la *modèle-compagne* de T — est alors modèle-complète.

Les corps *pseudo algébriquement clos* (PAC) sont des purs corps, existentiellement clos dans toute extension régulière, mais, en général, il n'existe pas d'expansion naturelle du langage pour laquelle cette théorie soit modèle-complète[1]. Cependant, les corps PAC ont des invariants élémentaires [CDM81], [FJ05], et ont été étudiés à de nombreuses reprises [Hru02], [Cha99], [Cha02], [CH04]. Les corps PAC sont le théâtre de phénomènes complexes qui jouent un rôle important dans le développement récent de la théorie des modèles, [CR16], [KR17], [Cha19], [Ram18], nous y reviendront au § 6.

Les modèles existentiellement clos d'une théorie présentent en général un caractère aléatoire – ou *générique* – résultant de leur définition. De façon un peu informelle, nous appellerons *générique*[2] une théorie (ou un modèle d'une telle théorie) qui axiomatise des structures existentiellement closes dans une classe raisonnable d'extensions.

Dans de nombreuses théories familières, les modèles existentiellement clos ne forment pas une classe élémentaire : la théorie des groupes [ES70], des groupes nilpotents [Sar74], des groupes résolubles [Sar76], des anneaux commutatifs [Che73], des corps non commutatifs (Sabbagh, 1970, non publié). Les modèles existentiellement clos de ces théories interprètent $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Cependant, les groupes existentiellement clos et les corps non commutatifs existentiellement clos ont été étudiés dans les années 70, menant à de surprenantes connexions entre la théorie des modèles, la théorie des groupes et la récursion, voir [Zie76], [SZ79], [Zie80], [HW75], [Bel74], [Bel74], [Bel78a], [Bel78b] et [Mac77, p. 5.2] pour un résumé sur le sujet. Plus récemment, Haykazyan et Kirby [HK18] ont étudié une autre classe de structures existentiellement closes qui n'admet pas de modèle-compagne, nous reviendrons là-dessus au § 6.

§ 2 Généricité et expansions aléatoires

Une première étude de structure inhabituelle, expansion d'une structure classique, a été initiée par Tarski [Tar51] lorsqu'il s'est interrogé sur la décidabilité de la structure $(\mathbb{R}, \mathbb{R}\cap\overline{\mathbb{Q}})$, le corps des réels augmenté d'un prédicat pour les réels algébriques. C'est Robinson qui répondra plus tard par l'affirmative, en montrant que la théorie de cette structure est modèle-complète, tout comme celle de $(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}})$ [Rob59b].

La structure $(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}})$, et plus généralement toute paire propre (K, k) de corps algébriquement clos, jouit de la propriété suivante : si (L, l) est une extension de (K, k) telle que l et K sont linéairement disjoints sur k alors (K, k) est existentiellement clos dans (L, l). Ainsi, l'expansion d'ACF par un prédicat pour un sous-modèle propre d'ACF présente naturellement une certaine généricité, ce qui est plutôt exceptionnelle. En générale, on étudie les modèles existentiellement clos d'une expansion, d'où le terme d'expansion générique.

Un exemple général d'expansions génériques est la construction de Winkler [Win75]. En considérant une $\mathscr{L}$-théorie T et $\mathscr{L}' \supseteq \mathscr{L}$, ont peut voir T comme une $\mathscr{L}'$-théorie qui n'impose rien sur les éléments de $\mathscr{L}' \setminus \mathscr{L}$. Si T est modèle-complète et élimine le quantificateur $\exists^\infty$ alors Winkler montre que les modèles existentiellement clos de T en tant que $\mathscr{L}'$-théorie, forment une classe élémentaire. Le cas particulier de cette construction où l'on étend génériquement le langage de T par un unique prédicat unaire, le *prédicat générique*, a été étudié par Chatzidakis et Pillay [CP98]. Ce prédicat présente alors un caractère très aléatoire, informellement, il réalise

[1]La théorie des corps pseudo-finis, la théorie des corps PAC ω-libres sont des théories de corps PAC qui admettent une expansion naturelle du langage qui donne la modèle-complétude, cf. section 1.5.2.

[2]Le mot générique a eu un sens précis en théorie des modèles classique, il correspondait à un modèle d'une théorie dans lequel le forcing infini et la satisfaction modèle-théorique coïncide (cf. par exemple [Mac77] ou [Che76]). Si la théorie est modèle-complète, les notions d'existentiellement clos et de structures génériques coïncident. Aujourd'hui, le terme générique pour les structures est plutôt utilisé de manière imprécise dans un sens proche du nôtre.

dans une seule structure toutes les façons possibles de colorier les points de la structure dans une extension. Ces constructions génériques ont des connections avec la néostabilité, nous y reviendrons au §6.

Une avancée récente dans le domaine des expansions génériques est la *fusion interpolative* développée par Kruckman, Tran et Walsberg [KTW18]. Etant donné des théories modèle-complètes arbitraires, ils décrivent un cadre dans lequel la modèle-compagne de l'union de ces théories existe. Il apparait que la plupart des structures génériques connues sont bi-interprétables avec la fusion interpolative de théories plus simples.

Considérons à présent les expansions T_1 et T_2 de la théorie ACF : T_1 est l'expansion par un prédicat générique, T_2 est l'expansion par un prédicat pour un sous corps propre algébriquement clos. On peut alors voir T_2 comme l'expansion générique de la théorie ACF par un prédicat pour un sous-corps, ainsi T_1 et T_2 sont deux expansions génériques d'ACF par un prédicat pour un réduit (trivial dans chacun des cas), le premier est la théorie de l'ensemble infini, le deuxième est la théorie ACF elle-même. Le premier résultat de ce manuscrit, le théorème A, présente un cadre général pour l'expansion générique d'une théorie par un prédicat pour un réduit.

§ 3 Expansion générique par un réduit prégéométrique

Soit T une théorie dans un langage $\mathscr{L}$. Soit $\mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}$ et T_0 un réduit de T au langage $\mathscr{L}_0$, et soit acl_0 la clôture algébrique au sens de $\mathscr{L}_0$. Soit $\mathscr{L}_S$ l'expansion de $\mathscr{L}$ par un prédicat unaire S, et T_S la théorie dans le langage $\mathscr{L}_S$ des structures $(\mathscr{M}, \mathscr{M}_0)$ où $\mathscr{M}$ est un modèle de T et S est un prédicat pour un modèle $\mathscr{M}_0$ de T_0 qui est une sous-structure de $\mathscr{M}$. On décrit à présent un cadre dans lequel une classe de modèles génériques de T_S est axiomatisable. On suppose ce qui suit.

(H_1) T est modèle-complete ;

(H_2) T_0 est modèle-complète et pour tout ensemble A infini $\mathrm{acl}_0(A) \models T_0$;

(H_3) T_0 est prégéométrique (acl_0 satisfait l'échange) ;

(H_4) pour tout $\mathscr{L}$-formule $\phi(x, y)$, il existe une $\mathscr{L}$-formule $\theta_\phi(y)$ telle que pour tout modèle $\mathscr{M}$ de T et uplet b de $\mathscr{M}$,

$$\begin{aligned} \mathscr{M} \models \theta_\phi(b) \iff & \text{il existe } \mathscr{N} \succ \mathscr{M} \text{ et } a \in \mathscr{N} \text{ tels que} \\ & \phi(a, b) \text{ et } a \text{ est un uplet indépendant sur } \mathscr{M}, \\ & \text{au sens de la prégéométrie } \mathrm{acl}_0. \end{aligned}$$

On note $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0$ la relation d'indépendance associée à la prégéométrie acl_0. Une extension $(\mathscr{N}, \mathscr{N}_0)$ de $(\mathscr{M}, \mathscr{M}_0)$ est dite *forte* si $\mathscr{N}_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_{\mathscr{M}_0} \mathscr{M}$.

Théorème A. *Il existe une théorie TS contenant T_S telle que*

- *tout modèle de T_S admet une extension forte qui est un modèle de TS ;*
- *si $(\mathscr{M}, \mathscr{M}_0) \models TS$ et $(\mathscr{N}, \mathscr{N}_0) \models T_S$ est une extension forte de $(\mathscr{M}, \mathscr{M}_0)$ alors $(\mathscr{M}, \mathscr{M}_0)$ est existentiellement close dans $(\mathscr{N}, \mathscr{N}_0)$.*

De plus, si la prégéométrie acl_0 *est* modulaire, *TS est la modèle compagne de T et la clôture algébrique au sens de TS coïncide avec la clôture algébrique au sens de T.*

Comme à l'accoutumée dans ce genre de résultat, l'axiomatisation donne une ligne directrice pour la preuve, elle est donnée au théorème 2.1.5. Pour un uplet donné b dans un modèle $\mathscr{M}$ de T, la formule $\theta_\phi(b)$ témoigne de l'existence d'une réalisation a de $\phi(x,b)$ dans une extension élémentaire $\mathscr{N}$ de $\mathscr{M}$ telle que pour toute partition $A_1 \cup A_2$ des coordonnées de a, il existe une sous-$\mathscr{L}_0$-structure $\mathscr{N}_0$ de $\mathscr{N}$ modèle de T_0 qui sépare A_1 de A_2, c'est-à-dire $A_1 \subseteq \mathscr{N}_0$ et $A_2 \cap \mathscr{N}_0 = \emptyset$. Un modèle existentiellement clos de T_S devra réaliser toutes ces attributions possibles de coordonnées pour toute formule du langage $\mathscr{L}$. L'élément essentiel ici est que c'est exprimable au premier ordre, à condition que les formules θ_ϕ existent.

L'hypothèse (H_1) est clairement nécessaire, et (H_3) fournit un cadre général pour exprimer les notions de base au premier ordre. De plus, cela nous permet de donner un traitement géométrique de la preuve, c'est-à-dire en utilisant $\mathop{\smile\!\!\!\!|}^0$ comme dans un calcul de déviation, pour préparer une éventuelle adaptation de la preuve à d'autres configurations. Dans (H_2), l'hypothèse que les ensembles infinis acl_0-clos soient modèles de T_0 peut certainement être affaibli en une condition proche de « tout ensemble acl_0-clos se plonge dans un modèle de T_0 », mais cela rendrait la preuve plus technique et ne produirait pas plus d'applications du théorème que celles que nous donnons dans ce manuscrit, dans l'état actuel de nos connaissances.

L'hypothèse (H_4) est, en pratique, une condition difficile à obtenir pour utiliser le théorème A. Cette hypothèse (H_4) est une généralisation de l'élimination du quantificateur $\exists^\infty$. Si $T_0 = T$ et T est prégéométrique, c'est d'ailleurs équivalent (cf. Fact 1.3.10), et il suffit de vérifier (H_2) afin d'appliquer le théorème A. La théorie obtenue dans ce cas est alors une paire générique de modèles de la théorie géométrique T. Si T_0 est la théorie de l'ensemble infini dans le langage vide, la condition (H_4) est encore équivalente à l'élimination du quantificateur $\exists^\infty$, (H_2) et (H_3) sont triviaux et le théorème A ne donne rien de plus que la construction du prédicat générique [CP98]. L'hypothèse (H_4) peut aussi être vue comme une condition de « définissabilité de la dimension », mais dans un sens fort puisque l'on considère la dimension au sens de la prégéométrie d'un réduit. Dans la section 2.2, on donne un énoncé équivalent à (H_4) en termes d'existence de bornes, ainsi qu'une réciproque faible du théorème A : en supposant (H_1, H_2, H_3), si TS existe, alors pour toute formule $\phi(x,y)$ et $k \leq |x|$, il existe $\theta_\phi^k(y)$ telle que pour tout uplet b dans un modèle $\mathscr{M}$ de T, $\mathscr{M} \models \theta_\phi^k(b)$ si et seulement s'il existe $\mathscr{N} \succ \mathscr{M}$ et $a \in \mathscr{N}$ tels que $\phi(a,b)$ et $a_k \mathop{\smile\!\!\!\!|}^0 \mathscr{M}(a_i)_{i \neq k}$. En particulier, T élimine $\exists^\infty$. En général, (H_4) n'est pas équivalent à l'élimination de $\exists^\infty$, nous verrons pourquoi dans le § 4.

La théorie TS du théorème A est la fusion interpolative de la théorie T avec la théorie des paires génériques de modèles de T_0, au sens de [KTW18].

Voyons à présent une première utilisation du théorème A. Soient $\mathbb{F}_{q_1}, \cdots, \mathbb{F}_{q_n}$ des corps finis et T une théorie dans le langage

$$\mathscr{L} = \left\{+, 0, (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{F}_{q_1}}, \ldots, (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{F}_{q_n}}, \cdots\right\},$$

telle que tout modèle de T admet, pour tout $1 \leq i \leq n$, une structure d'espace vectoriel infini sur $\mathbb{F}_{q_i}$ dans le langage $\{+, 0, (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{F}_{q_i}}\}$, où λ_α est la fonction de multiplication par le scalaire α.

Théorème B. *Soient $V_1, \cdots, V_n$ des prédicats unaires, $T_{V_1 \ldots V_n}$ la théorie dont les modèles sont des modèles de T dans lesquels V_i est un prédicat pour un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{F}_{q_i}$. Si T est modèle-complète et élimine le quantificateur $\exists^\infty$, alors $T_{V_1 \ldots V_n}$ admet une modèle-compagne.*

Le contexte décrit précédemment englobe les hypothèses (H_1, H_2, H_3). L'élimination du quantificateur $\exists^\infty$ donne, dans ce cas particulier, l'hypothèse (H_4), car la prégéométrie est uniformément finie, en utilisant un lemme classique de [CP98]. De plus, en appliquant une fois le théorème A, la théorie obtenue élimine aussi le quantificateur $\exists^\infty$, et on peut donc itérer et rajouter autant de sous-espaces vectoriels génériques que souhaité. Comme la prégéométrie associée aux espaces vectoriels est modulaire, la théorie obtenue est la modèle-compagne.

§ 4 Expansions génériques de corps

Sous-groupes additifs génériques en caractéristique positive. Soit p un nombre premier. Le groupe additif d'un corps de caractéristique p est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$, donc on peut appliquer le théorème B. Soit T l'une des théories suivantes.

- ACF_p la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p dans le langage des corps ;
- $\mathrm{SCF}_{p,e}$ la théorie des corps séparablement clos de caractéristique p et de degré d'imperfection $e \leq \infty$, dans le langage des corps augmenté de prédicats pour la p-indépendance ;
- Psf_c la théorie des corps pseudo-finis de caractéristique p dans le langage des corps augmentés de constantes pour les coefficients de polynômes irréductibles (cf. Section 1.5.2) ;
- ACFA_p la théorie des corps aux différences génériques de caractéristique p, dans le langage des corps aux différences.

L'expansion de T par un nombre arbitraire de sous-groupes additifs génériques existe. L'expansion de la théorie ACF_p par un sous-groupe additif générique sera notée ACFG, cette théorie n'existe qu'en caractéristique positive, comme nous allons le voir. Les chapitres 5, 6 et 7 de ce manuscrit sont consacrés à l'étude de la théorie ACFG, ces résultats sont décrits au § 8. Les corps PAC parfaits ont aussi une expansion générique similaire en caractéristique positive.

Théorème C. *Soit* PAC_G *la théorie dont les modèles sont des corps* PAC *parfaits de caractéristique* p *augmentés d'un prédicat* G *pour un sous-groupe additif, alors il existe une théorie* PACG *telle que :*

(1) tout modèle (F, G) *de* PAC_G *s'étend en un modèle* (K, G) *de* PACG *tel que* K *soit une extension régulière de* F *;*

(2) tout modèle (K, G) *de* PACG *est existentiellement clos dans toute extension* (F, G) *modèle de* PAC_G *telle que* F *soit une extension régulière de* K.

De plus, il est possible d'itérer cette construction.

Tous les résultats précédents concernant les expansions génériques de corps de caractéristique positive sont vrais en remplaçant G par un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel V, pour tout sous-corps $\mathbb{F}_q$ du corps ambiant.

Sous-groupes additifs génériques en caractéristique nulle. Les résultats précédents n'ont pas d'analogue en caractéristique nulle. Soit T une théorie inductive *arbitraire* de corps de caractéristique nulle dans un langage $\mathscr{L}$ contenant le langage des anneaux. Soit G un nouveau prédicat unaire et T_G la théorie des modèles de T où G est un prédicat pour un sous-groupe additif, T_G est inductive. Un raisonnement simple (Proposition 3.2.7) montre que, si (K, G) est un modèle existentiellement clos de T_G, alors l'ensemble $\{a \in K \mid aG \subseteq G\}$ est égal à $\mathbb{Z}$. En particulier, T_G n'admet pas de modèle-compagne. De même, si l'on impose que G soit divisible, le stabilisateur de G est $\mathbb{Q}$. En outre, si T est la théorie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors T satisfait les hypothèses (H_1, H_2, H_3) du théorème A (avec T_0 la théorie du groupe additif), donc par contraposée, (H_4)

n'est pas vérifié, alors que T élimine le quantificateur $\exists^\infty$.

Sous-groupes multiplicatifs génériques en toute caractéristique. L'expansion par un sous-groupe additif générique échoue en caractéristique nulle, cependant, nous avons le résultat suivant.

Théorème D. *Soit p un nombre premier ou nul. L'expansion de la théorie* ACF_p *par un sous-groupe multiplicatif générique existe.*

Les conditions (H_1, H_2, H_3) sont faciles à vérifier. Concernant l'hypothèse (H_4), on la montre seulement pour les formules définissant des variétés quasi-affines, et cela suffit pour l'existence de la modèle-compagne. L'hypothèse (H_4) découle d'un résultat de définissabilité en théorie de Kummer abstraite. Soit $W \subset K^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$ une variété algébrique affine irréductible dans un corps algébriquement clos K de caractéristique $p \geq 0$. On dit que W est *libre* si elle n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-groupe algébrique propre de $\mathbb{G}_m^n(K)$. Bays, Gavrilovitch et Hils montrent dans [BGH13] que W est libre si et seulement si tout élément de $\mathbb{G}_m^n(K)$ est le produit de $2n$ éléments de W, ce qui constitue une condition définissable[3].

§ 5 La classification de Shelah

Une part importante de la théorie des modèles consiste à classifier et comprendre les structures mathématiques, suivant l'idée directrice suivante, due principalement à Shelah : la complexité d'une structure est détectable dans les graphes bipartites associés aux ensembles définissables.

Par conséquent, la modération d'une structure est associée à l'absence de certaines configurations dans le graphe bipartite de toute formule. Par exemple, les structures stables sont celles qui ne définissent pas de demi-graphes infinis. Un fait remarquable en théorie de la stabilité est que cette définition en apparence combinatoire a un équivalent géométrique : l'existence d'une notion d'indépendance raisonnable (c'est à dire satisfaisant certaines propriétés) dans tout modèle, basée sur la déviation de Shelah. Pendant les vingt dernières années, les théoriciens des modèles se sont employés à adapter les méthodes et techniques provenant de la stabilité à des cadres instables, c'est ce qu'on appelle la *néostabilité*. Par exemple, la simplicité est une généralisation de la stabilité. Elle est aussi définie par une condition combinatoire sur les formules et est aussi caractérisée par un bon comportement de l'indépendance associée à la déviation, c'est le célèbre théorème de Kim-Pillay [KP97]. En utilisant ce théorème, c'est à dire en exhibant une relation d'indépendance qui vérifie une liste donnée d'axiomes, on montre que la théorie du graphe aléatoire, la théorie des corps PAC bornés ou encore ACFA, sont des théories simples. Cependant, d'autres théories, comme celle des corps PAC ω-libres [Cha99], celle des structures d'incidences génériques [CK17] ou encore la plupart des théories présentées au §4 ne sont pas simples, elles sont NSOP_1, une généralisation de la simplicité.

§ 6 Petite histoire récente des théories NSOP_1

Les théories NSOP_1, pour « not strong order property 1 », ont été définies par Džamonja et Shelah dans [DS04] (tout comme les théories NSOP_2) comme une extension de la hiérarchie $(\mathrm{NSOP}_n)_{n\geq 3}$. Dans [SU08], Shelah et Usvyatsov ont montré que T^*_{feq} (la modèle-complétion de la théorie d'une infinité de relations d'équivalences indépendantes paramétrées) est NSOP_1 et non simple. Pendant les trois dernières années, les théories NSOP_1 ont été intensément étudiées

[3] Minh Chieu Tran [Tra17] a obtenu le même résultat de définissabilité pour les variétés qu'il appelle *multiplicativement large*, en utilisant le théorème des indécomposables de Zilber. Le résultat de Bays, Gavrilovitch et Hils [BGH13] est plus général, ils prouvent la définissabilité de la condition en remplaçant $\mathbb{G}_m^n(K)$ par n'importe quelle variété semi-algébrique.

à travers deux approches différentes (et non mutuellement exclusives) : l'approche abstraite, qui utilise la combinatoire et la théorie des modèles pure, et l'approche concrète, ou appliquée, qui consiste à étudier des exemples particuliers.

La première avancée, en ce qui concerne l'étude abstraite des théories NSOP_1 fut un critère à la Kim-Pillay développé par Chernikov et Ramsey [CR16], qui énonce qu'une théorie est NSOP_1 s'il existe une relation d'indépendance qui satisfait une certaine liste de propriétés. Ce résultat s'est avéré très utile pour montrer que certaines théories sont NSOP_1, la théorie des corps PAC ω-libres en est un bon exemple. Un corps PAC est simple si et seulement s'il est borné ([CP98],[Cha99]). Cependant, dans son étude des corps PAC ω-libres (qui sont non bornés), Chatzidakis [Cha02] définit une notion d'indépendance *faible* et montre que cette dernière satisfait quelques propriétés du critère de Kim-Pillay, en particulier le célèbre *théorème d'indépendance*. Il s'avère que toutes les propriétés du critère [CR16] furent prouvées à ce moment-là, sauf une. Chernikov et Ramsey ont ainsi déduit que les corps PAC ω-libres sont NSOP_1 en vérifiant que l'indépendance faible satisfait cette dernière propriété. Ils ont aussi montré que la théorie des formes bilinéaires génériques sur un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps algébriquement clos, étudiée par Granger [Gra99], ainsi que la théorie des structures paramétrées généralisées [CR16, Example 6.3] sont NSOP_1.
La seconde avancée dans l'étude abstraite des théories NSOP_1 est le développement de la Kim-indépendance par Kaplan et Ramsey dans [KR17]. Ils introduisent des analogues de la division et de la déviation –la Kim-division et la Kim-déviation– qui se comportent bien dans les théories NSOP_1. La Kim-division est définie comme la division par rapport à une suite indiscernable bien particulière, une suite dans une extension globale invariante. De nombreuses propriétés de la déviation de Shelah dans les théories simples se retrouvent chez la Kim-déviation dans les théories NSOP_1. Par exemple, une théorie est NSOP_1 si et seulement si la Kim-indépendance est symétrique. Kaplan et Ramsey ont aussi complété le critère à la Kim-Pillay de [CR16] pour obtenir une caractérisation de la Kim-indépendance[4], de façon analogue au résultat classique de Kim-Pillay. Ils ont ensuite identifié la Kim-indépendance dans certaines théories NSOP_1. L'indépendance faible de Chatzidakis dans les corps PAC ω-libre s'est avérée être la Kim-indépendance. Dans l'exemple de Granger, la relation d'indépendance qui satisfait le critère de Chernikov et Ramsey est strictement plus forte que la Kim-indépendance.

En ce qui concerne l'approche appliquée, les structures d'incidences génériques (Conant et Kruckman [CK17]), les systèmes de triplets de Steiner (Barbina et Casanovas [BC18]) sont des nouveaux exemples de structures NSOP_1. Comme nous le verrons au § 7, ACFG et la plupart des théories décrites au § 4 sont des nouveaux exemples de théories NSOP_1. Ces exemples sont des constructions génériques, et ils partagent de nombreuses caractéristiques. Les théories simples ont longtemps été considérées comme des structures stables avec un « bruit aléatoire ». Un résultat encourageant fortement cette idée est la construction du prédicat générique [CP98], ajouter un prédicat générique à une théorie simple résulte en une théorie simple, cette expansion préserve la simplicité. Néanmoins, la simplicité n'est pas préservée si une généricité trop grande est présente. Par exemple, nous verrons au § 7 que la théorie ACFG n'est pas simple, et pourtant, il s'agit d'une expansion générique d'une théorie fortement minimale. Kruckman et Ramsey [KR18] montrent que l'expansion générique de Winkler [Win75] par un langage arbitraire (cf. § 2) préserve NSOP_1. Ils montrent aussi qu'une autre expansion générique due à Winkler préserve NSOP_1, l'expansion par des fonctions de Skolem génériques. Ils en déduisent que toute théorie NSOP_1 qui élimine le quantificateur $\exists^\infty$ admet une expansion NSOP_1 qui a des fonctions de Skolem définissables. Quant aux corps PAC, l'intuition générale est que leurs caractéristiques modèle-théoriques se réduisent à celles de leur groupe de Galois absolu. Les

[4] Plus précisément, ils montrent qu'une relation $\mathop{\smile\!\!\!\!\mid}$ satisfaisant [CR16, Proposition 5.3] renforce la Kim-indépendance. La propriété *Witnessing* assure que l'indépendance au sens de la Kim-division renforce $\mathop{\smile\!\!\!\!\mid}$.

résultats récents de Chatzidakis et Ramsey encouragent cette idée : un corps PAC est NSOP_n si et seulement si son groupe de Galois absolu l'est ([Cha19] pour $n \geq 3$, [Ram18] pour $n = 1, 2$).

Dernièrement, Haykazyan et Kirby [HK18] ont mis en lumière une nouvelle source de théories NSOP_1, au sens de la logique positive. Ils étudient la classe des corps exponentiels existentiellement clos (un corps exponentiel est un corps muni d'un homomorphisme entre le groupe additif et le groupe multiplicatif). Tout comme pour la classe des corps non commutatifs existentiellement clos, ou les corps munis d'un sous-groupe additif en caractéristique nulle, cette classe n'est pas élémentaire. Néanmoins, une idée qui remonte à Shelah [She75] consiste à étudier ce genre de classes en ne considérant seulement les formules existentielles. C'est l'ambition de la logique positive, qui fut développée de manière différente par Ben-Yaacov [Ben03a] et Pillay [Pil00]. Des analogues de la stabilité [Pil00] [Ben03b] et de la simplicité [Ben03b] dans ces cadres ont vu le jour par la suite. Haykazyan et Kirby [HK18] ont adapté les résultats de Chernikov et Ramsey [CR16] pour déduire de l'existence d'une relation d'indépendance raisonnable que les corps exponentiels existentiellement clos sont NSOP_1 au sens de la logique positive. Il est raisonnable de penser que la théorie développée par Haykazyan et Kirby peut être utilisée afin de montrer que la classe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle munis d'un sous-groupe additif générique est NSOP_1 au sens de la logique positive.

§ 7 Preservation de NSOP_1

Le prochain résultat donne une condition pour que l'expansion générique du § 3 préserve NSOP_1. Comme dans le § 3, soit T une $\mathscr{L}$-théorie, $\mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}$ et T_0 le réduit de T au langage $\mathscr{L}_0$. On suppose que les hypothèses (H_1) à (H_4) sont satisfaites par T et T_0, donc la théorie TS existe. Soient respectivement acl_T, acl_0 les clôtures algébriques au sens de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}_0$, et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^0$ la relation d'indépendance au sens de la prégéométrie acl_0.

Théorème E. *On suppose que* acl_0 *définie une prégéométrie modulaire, que* T *est* NSOP_1 *et que* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$ *est la Kim-indépendance au sens de* T*. Soit* $\mathscr{M}$ *un modèle de* T *et* A, B, C acl_T*-clos contenant* $\mathscr{M}$*, dans un modèle monstre. On suppose que*

(A) *Pour tout* $A, B, C, \mathscr{M}$ *comme au-dessus, si* $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T_{\mathscr{M}} A, B$ *et* $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T_{\mathscr{M}} B$ *alors*

$$(\mathrm{acl}_T(AC), \mathrm{acl}_T(BC)) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^0_{A,B} \mathrm{acl}_T(AB).$$

Alors la théorie TS *est* NSOP_1 *et la Kim-indépendance au sens de* TS *est donnée par la relation* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^w$*, définie par*

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T_{\mathscr{M}} B \text{ et } S(\mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}_T(A\mathscr{M}), \mathrm{acl}_T(B\mathscr{M}))) = \mathrm{acl}_0(S(\mathrm{acl}_T(A\mathscr{M})), S(\mathrm{acl}_T(B\mathscr{M}))).$$

Le théorème E est une conséquence de considérations plus générales. En partant d'une relation d'indépendance $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$ dans les modèles de T, on définit deux relations d'indépendance dans tout modèle de TS, une indépendance *forte* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{st}$ et une indépendance *faible* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^w$. Ces deux relations étendent la relation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$. Au chapitre 4, on analyse les propriétés de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$ qui sont transmises à $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^w$ ou $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{st}$. Si T est NSOP_1 et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$ est la Kim-indépendance, alors toutes les propriétés satisfaites par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$ qui caractérisent la Kim-indépendance et le fait que T soit NSOP_1 sont transférées à $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^w$, sauf le théorème d'indépendance, qui requiert *(A)*. Cela donne le théorème E. On donne une analyse fine des propriétés conservées de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$ à $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^w$ et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{st}$. Par exemple, si $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$ est stationnaire au-dessus de certains ensembles, il en est de même pour $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{st}$, au-dessus de ces mêmes ensembles. Si $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$ satisfait $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}'$*-amalgamation* (une version du théorème d'indépendance dans laquelle les paramètres sont choisis indépendants au sens d'une autre relation, $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{\prime}$, cf. Section 1.2) alors $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{w}$ satisfait aussi $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{\prime}$-amalgamation. On utilise ceci pour montrer que, lorsque c'est possible, si l'on itère l'expansion d'une théorie NSOP_1 par un réduit générique, on obtient toujours une théorie NSOP_1 (cf. Corollary 4.2.4).

Kaplan et Ramsey [KR17] donnent une condition nécessaire et suffisante géométrique pour qu'une théorie NSOP_1 soit simple : la Kim-indépendance doit satisfaire la propriété de *Monotonicité sur la base* (si $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_C bd$ alors $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Cb} d$, cf. Section 1.2). Dans notre cadre, cela se traduit en un critère sur l'intrication entre les clôtures algébriques acl_T et acl_0 (cf. Corollary 4.2.3). La condition (A) exprime également un certain « contrôle » de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{T}$ sur $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{0}$. La « proximité » qu'entretient T_0 avec T joue un rôle intéressant en ce qui concerne la préservation des notions de néostabilité lors de l'expansion à TS, comme nous pouvons le voir dans la table suivante.

Configuration $T_0 \subseteq T$	Expansion générique TS
$T_0 = T$	Préserve la stabilité
$T_0 \subseteq T$	Préserve NSOP_1
$T_0 = \emptyset$	Préserve la simplicité

Si T est une théorie de corps de caractéristique positive et T_0 le réduit additif de T, la condition (A) se réduit à une condition beaucoup plus simple, la condition (B) du théorème F. Pour un corps A, on note $\overline{A}$ sa clôture algébrique au sens de la théorie des corps.

Théorème F. *Soit T une théorie modèle-complète et NSOP_1 de corps de caractéristique positive qui élimine le quantificateur $\exists^\infty$. Soit A, B des ensembles acl_T-clos et $E \models T$ contenu dans A et B. Soit $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{T}$ la Kim-indépendance dans T. On suppose que :*

(B) *pour tout A, B et E comme au-dessus, si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{T}_{E} B$ alors $\mathrm{acl}_T(AB) \subseteq \overline{AB}$.*

Alors, l'expansion de T par des sous-groupes additifs génériques $TG_1 \dots G_n$ est NSOP_1. La Kim-indépendance dans $TG_1 \dots G_n$ est donnée par

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{T}_{E} B \text{ et pour tout } i \leq n \; G_i(A+B) = G_i(A) + G_i(B),$$

pour tout A, B et E comme au dessus. De plus, $TG_1 \cdots G_n$ n'est pas simple.

En particulier, tous les exemples en caractéristique positive du § 4 sauf celui du théorème C sont NSOP_1 et non simple. En ce qui concerne la théorie PACG du théorème C, tous les corps PAC parfaits ne sont pas NSOP_1, mais satisfont tous l'hypothèse (B) (car ils sont *algébriquement bornés* [CH04]). Il suit de cela que l'expansion dans un language approprié d'un corps de Frobenius parfait, ou d'un corps PAC ω-libre parfait en caractéristique positive par des sous-groupes additifs génériques est NSOP_1. Remarquons que dans le théorème F, les G_i peuvent être remplacés par des $\mathbb{F}_{q_i}$-espaces vectoriels, pour tout sous-corps $\mathbb{F}_{q_i}$ d'un modèles de T.

La preuve du théorème F consiste à déduire (A) à partir de (B). Elle utilise une description de la Kim-indépendance dans toute théorie de corps, par Kaplan et Ramsey [KR17] qui est basée sur les travaux de Chatzidakis [Cha99]. On conclut par un mélange d'arguments de stabilité dans la clôture séparable du corps et de théorie galoisienne.

Enfin, pour tout p premier ou nul, l'expansion de la théorie ACF_p par un prédicat pour un sous-groupe multiplicatif générique est aussi NSOP_1 et non simple. On utilise le théorème E directement, la condition (A) découle d'un argument de cohéritier dans la théorie stable ACF_p.

§ 8 La théorie ACFG

Les chapitres 5, 6 et 7 sont dédiés à l'étude de la théorie ACFG, l'expansion de ACF_p par un sous-groupe additif générique, pour un p premier fixé.

Presque simple. Dans ACFG, aucune relation d'indépendance ne satisfait le théorème de Kim-Pillay pour la simplicité. Cependant, deux relations n'en sont pas loin.

Théorème G.

- *Dans* ACFG*, la Kim-indépendance satisfait toutes les propriétés du théorème de Kim-Pillay sur les théories simples sauf la* Monotonicité sur la base.
- *Dans* ACFG*, il existe une relation d'indépendance qui satisfait toutes les propriétés du théorème de Kim-Pillay sur les théories simples sauf le* Caractère local.

L'indépendance du deuxième point est l'indépendance forte, mentionnée au § 7.

Des modèles de la théorie ACFG. Soit (K, G) un modèle de la théorie ACFG, G est le sous-groupe additif générique du corps K. Le groupe G a des propriétés algébriques remarquables. Par exemple, il est dense et codense dans K pour la topologie de Zariski. De plus, tout élément de K est le produit de deux éléments de G, en particulier, G est stablement plongé dans K.

Soit $\overline{\mathbb{F}_p}$ la clôture algébrique au sens des corps du corps premier $\mathbb{F}_p$. En utilisant que le corps $\overline{\mathbb{F}_p}$ est localement fini, et l'élimination des quantificateurs dans ACF_p, on construit par union de chaîne un sous-groupe G de $\overline{\mathbb{F}_p}$ tel que $(\overline{\mathbb{F}_p}, G)$ soit un modèle d'ACFG. L'espace $\mathrm{Sg}(\overline{\mathbb{F}_p})$ des sous-groupes additifs de $\overline{\mathbb{F}_p}$ peut être munit de la topologie de Chabauty (cf. Section 1.6). On montre que presque tous (au sens de Baire) les sous-groupes additifs G de $\overline{\mathbb{F}_p}$ sont génériques.

Théorème H. *L'ensemble des sous-groupes G de $\overline{\mathbb{F}_p}$ tels que $(\overline{\mathbb{F}_p}, G) \models$ ACFG est un G_δ dense de $\mathrm{Sg}(\overline{\mathbb{F}_p})$, pour la topologie de Chabauty sur $\mathrm{Sg}(\overline{\mathbb{F}_p})$.*

Ce résultat se prouve de la même manière que le résultat analogue de Hrushovski concernant les modèles de la théorie ACFA dans $\overline{\mathbb{F}_p}$ [Hru04].

Les imaginaires dans ACFG. Soit (K, G) un modèle de la théorie ACFG. Il n'y a pas de paramètres canoniques pour les éléments du groupe quotient K/G. Une question naturelle s'impose alors : en rajoutant à (K, G) des paramètres canoniques pour le quotient K/G, peut-on éliminer tous les imaginaires de K/G ? Pour formuler la réponse à cette question de façon précise, on considère la structure à deux sortes $(K, K/G)$ qui consiste en une sorte pour le corps K algébriquement clos, une sorte pour le groupe K/G, et la surjection canonique $\pi : K \to K/G$.

Théorème I. *Pour tout modèle (K, G) de la théorie* ACFG*, la structure $(K, K/G)$ a l'élimination faible des imaginaires.*

L'élimination faible des imaginaires est un résultat optimal pour $(K, K/G)$. En effet, $(K/G, +)$ a une structure de pur espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$, donc les imaginaires finis ne peuvent pas être éliminés. En outre, rajouter des paramètres canoniques pour les imaginaires finis de K/G ne suffirait même pas à éliminer tous les imaginaires finis de la structure $(K, K/G)$, cf. Example 6.3.6. La preuve du théorème I suit le même schéma que les preuves classiques de l'élimination des imaginaires dans [Hru02], [CH99] ou encore [CP98], elle est basée sur le théorème d'indépendance. Cependant, dans notre cas la Kim-indépendance joue le rôle que l'indépendance de la déviation joue dans les preuves classiques. La Kim-indépendance dans (K, G) est donnée par $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\nolimits^{\mathrm{ACF}}_C B$ et $G(A + B) = G(A) + G(B)$, pour $C = A \cap B$ et A, B, et C algébriquement clos. Dans $(K, K/G)$, la condition $G(A + B) = G(A) + G(B)$ se traduit en $\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(C)$, une relation « modulaire stable » qui vient de la structure de pur $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de la sorte K/G. Donc dans $(K, K/G)$, la Kim-indépendance est la conjonction de l'indépendance au sens des corps algébriquement clos et cette indépendance « modulaire stable », qui se comporte bien mieux que l'indépendance dans (K, G). Par ailleurs, les éléments de K/G sont remplacés par des représentants spéciaux (*minimaux* ou *maximaux*) dans K afin d'obtenir une version du théorème d'indépendance et d'adapter l'argument classique. La preuve du théorème I devrait s'adapter telle quelle en remplaçant ACF_p par n'importe quelle théorie de corps stables qui élimine faiblement les imaginaires.

L'étude de la théorie de $(K, K/G)$ suggère une construction générique « duale » à celle que l'on présente au §3. Soit T une théorie et T_0 un réduit de T a un sous-langage $\mathscr{L}_0$ du langage de T. On considère la théorie T' dans un langage à deux sortes dont les modèles sont composés d'un modèle $\mathscr{M}$ de T dans une sorte, d'un modèle $\mathscr{M}_0$ de T_0 dans une autre sorte, et d'un $\mathscr{L}_0$-homomorphisme surjectif $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}_0$. On peut vérifier que, sous les hypothèses (H_1) à (H_4), on construit la modèle-compagne de la théorie T', dans laquelle l'étude des imaginaires devrait être facilitée.

Déviation et déviation épineuse dans ACFG. L'indépendance associée à la déviation n'est pas symétrique dans ACFG, car sinon, la théorie serait simple. Le théorème G donne l'intuition naïve que la Kim-indépendance et l'indépendance de la déviation ne diffèrent que par la propriété de monotonicité sur la base, et en effet, l'indépendance de la déviation est obtenue en « forçant » la Kim-indépendance à satisfaire la propriété de monotonicité sur la base. On montre aussi que la déviation, la division (et la déviation épineuse) coïncident pour les types.

Théorème J. *Soient respectivement* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{f}$, $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}$, $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{þ}$, $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{K}$ *les indépendances au sens de la déviation, division, déviation épineuse*[5] *et la Kim-déviation dans* ACFG*. Alors*

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{f}_{C} b \iff a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{C} b \iff a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{þ}_{C} b \iff \textit{pour tout } C \subseteq D \subseteq Cb,\ \ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{K}_{D} b.$$

Dans les théories NSOP_1, l'indépendance de la déviation et de la Kim-déviation sont des notions différentes, et aucune bonne description de la déviation n'existe en général, mais la plupart des exemples connus de théories NSOP_1 et non simples ont la même description de la déviation que dans ACFG [Cha02], [CK17], [KR18]. Une ligne directrice générale pour montrer que la déviation et la division coïncident pour les types semble émerger des différents exemples. Elle inclut un résultat de « transitivité mixte » entre une indépendance forte et la Kim-indépendance, qui permet de montrer que l'indépendance de la division satisfait la propriété d'extension et donc que c'est l'indépendance de la déviation. Une discussion à propos des similarités entre les différents exemples de théories NSOP_1 est proposée à la section 7.4, ainsi que les différences principales entre ACFG et les autres exemples (voir aussi la figure 7.2). On donne aussi une étude de quelques phénomènes qui apparaissent lorsque l'on force la propriété de monotonicité sur la base pour une relation arbitraire, cf. Section 7.1.

Notre étude de la déviation épineuse dans ACFG utilise la description géométrique de cette dernière, donnée par Adler [Adl09a]. De façon plus générale, la partie A et tout particulièrement le chapitre 7 regorge de ce traitement géométrique des relations d'indépendances, qui prend racine dans le théorème de Kim-Pillay, mais a été principalement développé par Adler [Adl08a], [Adl09a], [Adl09b] puis suivi par [CK12], [CR16], [CK17], entre autres.

Passons à la partie B.

[5] Il s'agit en fait ici de la restriction de la déviation épineuse à la sorte réelle, l'indépendance épineuse étant définie en général dans T^{eq}.

§ 9 Expansions du groupe des entiers

D'un point de vue modèle théorique, la structure $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ n'est pas appréhensible, cela suit des célèbres travaux de Godel sur l'arithmétique de Péano. Il est donc naturel d'étudier des réduits modérés de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. L'étude des structures $(\mathbb{Z}, +, 0)$ et $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ remonte à 1929 par Presburger, la théorie de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, encore aujourd'hui, est appelée *l'arithmétique de Presburger*[6]. Ces deux structures admettent l'élimination des quantificateurs dans l'expansion du langage par la constante 1, et des prédicats pour les sous-groupes $n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La théorie de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est superstable de U-rang 1, celle de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ est instable, mais NIP et même dp-minimale.

L'étude des expansions modérées de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est une sujet récent. Il y a peu, aucun exemples de telles structures n'avaient été étudiés, autre que $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$. Les premiers exemples ont été donnés indépendamment par Palacín et Sklinos [PS18] d'une part, et par Poizat [Poi14] d'autre part. Plus spécifiquement, ils montrent, par des méthodes différentes que pour tout entier $q \geq 2$, la structure $(\mathbb{Z}, +, 0, \prod_q)$ est superstable de U-rang ω, où $\prod_q = \{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Palacín et Sklinos montrent le même résultat pour d'autres structures, par exemple $(\mathbb{Z}, +, 0, \mathrm{Fac})$, où $\mathrm{Fac} = \{n! \mid n \in \mathbb{N}\}$. Conant [Con17b], et Lambotte et Point [LP17] ont généralisé indépendamment ces résultats. Pour un ensemble $A \subseteq \mathbb{Z}$ majoré ou minoré, ils énoncent des conditions sur la répartition des points de A pour que la structure $(\mathbb{Z}, +, 0, A)$ soit superstable de U-rang ω. Conant donne aussi une condition nécessaire pour que la structure $(\mathbb{Z}, +, 0, A)$ soit stable.

Un exemple un peu différent a été produit par Kaplan et Shelah dans [KS17]. Ils montrent que pour $\mathrm{Pr} = \{p \in \mathbb{Z} \mid |p| \text{ est premier}\}$, la structure $(\mathbb{Z}, +, 0, \mathrm{Pr})$ a la propriété d'indépendance, et donc est instable. Néanmoins, en admettant la conjecture de Dickson [7], cette structure est supersimple de U-rang 1.

Par ailleurs, $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ restait la seule expansion instable dp-minimale de $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Aschenbrenner, Dolich, Haskell, Macpherson, et Starchenko posent la question suivante [Asc+13, Question 5.32] : toute expansion dp-minimale de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est-elle un réduit de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$? $(\star)$. Dans [Asc+16], les mêmes auteurs montrent que $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ n'a pas d'expansion propre dp-minimales. Ils utilisent pour cela un résultat fort de théorie des automates dû à Michaux et Villemaire [MV96] qui peut s'énoncer comme suit : toute expansion propre de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ définit un nouveau sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. Ce fut plus tard généralisé par Dolich et Goodrick [DG17], ils obtiennent que $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ n'a pas d'expansion propre forte. Avec un résultat de Conant [Con18], que l'on décrit plus bas, toute autre expansion instable et dp-minimale de $(\mathbb{Z}, +, 0)$, si elle existe, n'est ni un réduit, ni une extension de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, donc la question $(\star)$ devient

$$(\mathbb{Z}, +, 0, <) \text{ est-elle la seule expansion dp-minimale non-triviale de } (\mathbb{Z}, +, 0)\,? \qquad (\star\star)$$

§ 10 Une nouvelle expansion dp-minimale des entiers

On introduit une nouvelle famille d'expansions dp-minimales de $(\mathbb{Z}, +, 0)$, donnant une réponse négative à la question $(\star\star)$. Plus généralement, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on introduit une famille d'expansions de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ qui ont dp-rang n. Après ces travaux, nous avons été informés

[6] Pour certain logiciens, l'arithmétique de Presburger est la théorie de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ et non celle de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, et en effet, dans son papier de 1929, Presburger étudie principalement la théorie de $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Néanmoins, dans ce même papier, il explique que ses résultats s'étendent à la théorie de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, cf. [Haa18] pour une étude de l'arithmétique de Presburger des origines à nos jours.

[7] Une conjecture en théorie des nombres concernant la répartition des nombres premiers dans les suites arithmétiques, qui généralise le théorème de Dirichlet sur les nombres premiers.

qu'un résultat similaire avait été prouvé par François Guignot [Gui16], et par Nathanaël Mariaule [Mar17, Corollary 2.11].

Soit P un ensemble fini ou infini de nombres premiers. Pour chaque $p \in P$, soit $|_p$ le préordre sur $\mathbb{Z}$ définit par

$$a \mid_p b \iff v_p(a) \leq v_p(b)$$

où v_p est la valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$.

Théorème K. *La structure $(\mathbb{Z}, +, 0, (\cdot \mid_p \cdot)_{p \in P})$ a l'élimination des quantificateurs dans le langage augmenté par 1 et des prédicats pour les sous-groupes $n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, son dp-rang est égal à $|P|$, le cardinal de P.*

Chaque valuation p-adique induit sur $\mathbb{Z}$ une structure d'arbre, et une topologie d'arbre similaire à celle décrite en section 1.6. Chaque entier est représenté comme une branche dont les noeuds sont les coordonnées dans sa représentation p-adique. Cette structure d'arbre est préservée par extensions élémentaires et permet un traitement graphique des arguments. La preuve de l'élimination des quantificateurs est technique, mais n'utilise pas de résultats arithmétiques plus forts que le théorème des restes chinois, qui se traduit ici par la densité topologique des sous-groupes $n\mathbb{Z}$, pour n premier avec p.

Le calcul du dp-rang de $(\mathbb{Z}, +, 0, (\cdot \mid_p \cdot)_{p \in P})$ se fait en deux étapes. On montre d'abord que $(\mathbb{Z}, +, 0, |_p)$ est dp-minimale pour tout p, par l'élimination des quantificateurs et la dp-minimalité de la structure $(\mathbb{Q}_p, +, 0, |_p)$ [DGL11]. Puis on montre que le dp-rang de $(\mathbb{Z}, +, 0, (\cdot \mid_p \cdot)_{p \in P})$ ne peut excéder la somme des dp-rangs de chaque réduit $(\mathbb{Z}, +, 0, |_p)$, et on conclut en exhibant un ict-motif de taille $|P|$.

L'élimination des quantificateurs dans $(\mathbb{Z}, +, 0, |_p)$ implique que tout ensemble définissable est combinaison booléenne d'ensembles définissables sans paramètres et de boules (au sens de la valuation). La C-minimalité est une notion introduite par Macpherson et Steinhorn [MS96] pour être un analogue de l'o-minimalité dans le contexte des structures valuées ou arborescentes. Grossièrement, dans une structure C-minimale arborescente, tout ensemble définissable est une combinaison booléenne de boules. Cela suggère une définition de *quasi*-C-minimalité, en analogie avec la quasi-o-minimalité [BPW00], qui devrait impliquer la dp-minimalité, et devrait comprendre la structure $(\mathbb{Z}, +, 0, |_p)$. La même remarque s'applique à la notion encore plus générale de VC-minimalité introduite par Adler [Adl08b].

§ 11 Phénomènes de minimalité

Étant donné une class $\mathcal{C}$ de structures qui partagent le même domaine, et $\mathscr{M} \in \mathcal{C}$, on dit que $\mathscr{M}$ est *minimale* dans $\mathcal{C}$ s'il n'existe pas de réduit propre de $\mathscr{M}$ dans $\mathcal{C}$. De même, $\mathscr{M}$ est *maximale* dans $\mathcal{C}$ s'il n'existe pas d'expansions propres de $\mathscr{M}$ dans $\mathcal{C}$.

Un premier exemple de minimalité a été donné par Pillay et Steinhorn [PS87] : $(\mathbb{N}, <)$ n'a pas d'expansions propres o-minimales, donc $(\mathbb{N}, <)$ est maximale dans la classe des structures o-minimales de domaine $\mathbb{N}$. Un autre exemple fut donné par Marker, motivé par une question de Zilber : un corps algébriquement clos admet-il des expansions propres fortement minimales ? Hrushovski donna une réponse positive à la question [Hru92], néanmoins, Marker montra que $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ n'admet *aucune* expansion propre qui soit un réduit propre de $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{R})$, donc $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{R})$ est minimale parmi les expansions propres de $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$.

L'étude des expansions de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ a récemment produit divers résultats de minimalité et de maximalité. Nous l'avons vu plus haut, $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ est une structure maximale dp-minimale sur

$\mathbb{Z}$ [Asc+16]. Donnant suite aux résultats de Palacín et Sklinos [PS18], Conant et Pillay [CP18] ont montré que $(\mathbb{Z}, +, 0)$ n'a pas d'expansions propres stables de dp-rang fini. En d'autres termes, $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est maximal parmi les structures stables de dp-rang fini sur $\mathbb{Z}$. Puisque $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ est dp-minimale, il suit de cela qu'il n'existe pas de structure stable sur $\mathbb{Z}$ qui soit une expansion propre de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ et un réduit propre de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$. Dans [Con18], Conant renforce encore ce résultat en montrant qu'il n'existe pas de structures qui est une expansion propre de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ et un réduit propre de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, autrement dit $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ est minimale parmi toutes les expansions propres de $(\mathbb{Z}, +, 0)$. On montre le résultat analogue pour notre expansion de $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Théorème L. $(\mathbb{Z}, +, 0, |_p)$ *est une expansion propre minimale de* $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

La preuve de Conant [Con18] n'utilise pas que $(\mathbb{Z}, +, 0)$ n'admet pas d'expansions propres stables qui soit un réduit de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$. Sa preuve consiste en une analyse détaillée des ensembles définissables en dimension arbitraire. Conant a demandé si son théorème pouvait être montré en utilisant des méthodes modèles théoriques qui incluaient le résultat [CP18]. C'est la stratégie que l'on a adopté pour montrer le théorème L : il n'existe pas de structure *instable* qui soit un réduit propre de $(\mathbb{Z}, +, 0, |_p)$ et une expansion propre de $(\mathbb{Z}, +, 0)$. On donne aussi une preuve plus rapide du résultat de Conant, par la même méthode que celle que l'on a utilisée pour montrer le théorème L, que nous décrivons maintenant. Par un résultat classique de Shelah, l'instabilité d'une théorie peut être témoignée par une formule dont l'un des uplets de variable est un singleton. Si $\mathcal{Z}$ est une expansion instable (et donc propre) de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ et un réduit de $(\mathbb{Z}, +, 0, |_p)$, alors, le résultat de Shelah permet de montrer, quitte à travailler dans une extension élémentaire $\mathcal{Z}'$ de $\mathcal{Z}$, qu'une nouvelle formule du langage de $\mathcal{Z}$ définit un nouveau sous-ensemble du domaine dans $\mathcal{Z}'$. Par conséquent, le problème se réduit à une analyse des ensembles définissables unidimensionnels de $\mathcal{Z}'$, que l'on fait grâce à l'élimination des quantificateurs dans $(\mathbb{Z}, +, 0, |_p)$. Le reste de la preuve consiste à définir la relation $x \mid_p y$ en appliquant des transformations dans le langage $\{+, 0\}$ à la nouvelle formule. En étudiant les sous-groupes uniformément définissables de la structure, on montre qu'une telle nouvelle formule peut être transformée pour définir uniformément une chaîne de boules centrées en zéro (c'est à dire des sous-groupes) de rayons consécutifs strictement croissants, et uniquement des ensembles de cette forme. En considérant la formule dans $\mathbb{Z}$, elle définit alors un nombre cofini de sous-groupes de la forme $p^k\mathbb{Z}$, et seulement des ensembles de cette forme. Puisque $a \mid_p b$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a \in p^k\mathbb{Z} \to b \in p^k\mathbb{Z}$, le résultat suit facilement.

Le théorème L et le résultat analogue de Conant ne sont plus vrais dans des extensions élémentaires. Nous donnons des contre-exemples dans la section 9.3. Néanmoins, pour des notions un peu plus fortes de réduits et d'expansions, les résultats de minimalité sont conservés dans des extensions élémentaires, voir le corollaire 9.1.9 et le théorème 9.2.12.

Au regard de la question $(\star\star)$ plus haut, on pourrait formuler la trichotomie suivante : une expansion dp-minimale de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est soit stable (et donc interdéfinissable avec $(\mathbb{Z}, +, 0)$), soit $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, soit elle définit une valuation. Cette conjecture est inspirée du résultat suivant concernant les corps, dû à Johnson [Joh15] : si K est un corps dp-minimal, alors il est soit algébriquement clos (donc stable), soit réel-clos, soit il admet une valuation henselienne définissable. Cependant, la conjecture pour $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est fausse. En effet, Tran et Walsberg [TW17] ont trouvé une nouvelle famille d'expansions dp-minimales de $(\mathbb{Z}, +, 0)$, en ajoutant des ordres cycliques. Il serait intéressant de savoir si d'autres expansions dp-minimales de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ existent, ou encore si ces expansions de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ par des ordres cycliques satisfont la même propriété de minimalité que $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ et $(\mathbb{Z}, +, 0, |_p)$.