Dans *Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation de J. Vauthier et J.-J. Prat*, on trouve :

Definition 0.1. *Un groupe G est* continu *si c'est un groupe linéairement ordonné, tel que toute suite croissante admette une borne sup et que l'ordre soit dense.*

Un tel groupe est alors archimédien. On montre qu'on a aussi que toute partie bornée admet une borne sup et que le groupe est necessairement *divisible*. On a alors le :

Théorème 0.2 (Eudoxe)**.** *Si H est un groupe archimédien linéairement ordonné et que G est un groupe continu. Alors pour tout $h \in H^{>0}$ et $g \in G^{>0}$ il existe un unique homomorphisme de groupe ordonné* injectif *et monotone croissant $\theta : H \to G$ tel qte $\theta(h) = g$. De plus si H est continu, θ est un isomorphisme.*

En particulier on a que deux groupes continus sont isomorphes. On pose $\mathbb{R}$ un groupe continu. Le groupe est alors naturellement muni d'une multiplication. Pour $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ on a alors un unique isomorphisme $\theta_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui envoit 1 sur a. Cet isomorphisme définit alors la multiplication par a. Pour $a < 0$ on a l'anti-isomorphisme $-\theta_a$. On conclut par vérification :

Théorème 0.3. *Il existe une unique structure de corps ordonné sur tout groupe continu.*

On a donc que l'*unicité du corps ordonné complet* se déduit en fait de l'*unicité du groupe ordonné complet* ! (groupe continu = groupe ordonné complet)

Remarque 0.4 (Exponentielle et logarithme)**.** *Une fois la structure de corps définit sur un groupe continu $\mathbb{R}$, on dispose du groupe (multiplicatif) des éléments strictement positifs, disons $\mathbb{R}^{>0}$. On vérifie que ce groupe est un* groupe continu. *Par le théorème d'Eudoxe, pour chaque $a \in \mathbb{R}^{>0}$ il existe donc un unique isomorphisme entre $\mathbb{R}^{>0}$ et $\mathbb{R}$ (qui envoit naturellement 1 sur 0) et qui envoit a sur 1. On appelle cet isomorphisme le logarithme en base a. Sa réciproque est appelée l'exponentielle en base a.*