french

Expansions et Néostabilité en Théorie des Modèles.

Christian d'Elbée

20 juin 2019

La classification des structures : Stabilité

Des contraintes combinatoires sur l'algèbre des ensembles définissables.

Définition (Shelah)

Une théorie T est stable si dans tout modèle de T, il n'existe pas de formule $\phi(x, y)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_i)_{i<n}$ et $(b_i)_{i<n}$ telles que

$$\phi(a_i, b_j) \iff i < j.$$

Une théorie non stable est dite instable.

Exemple

1. $(\mathbb{Z}, +, 0)$, les corps $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{F}_p}$ sont des structures stables ;
2. Une structure qui ordonne totalement un ensemble infini est instable. $(\mathbb{Z}, +, <)$, $(\mathbb{Z}, |)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Structures arborescentes.

Néostabilité : NIP et NSOP

Définition (Shelah)

Une théorie T est NIP *si dans tout modèle de T, il n'existe pas de formule $\phi(x, y)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_i)_{i<n}$ et $(b_J)_{J \subseteq \{0,\dots,n-1\}}$ telles que*

$$\phi(a_i, b_J) \iff i \in J.$$

Une théorie est NSOP *si ...*

Exemple

1. $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, $(\mathbb{Q}_p, +, \cdot, 0, 1, v_p)$ sont NIP et instables ;
2. Graphes aléatoires, corps pseudo-finis sont NSOP et instables.

Néostabilité : NIP et NSOP

Fait (Shelah)

T est stable ssi T est NIP et NSOP.

Exemple

1. $(\mathbb{Z}, +, 0)$, les corps $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{F}_p}$ sont des structures stables ;
2. $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, $(\mathbb{Q}_p, +, \cdot, 0, 1, v_p)$ sont NIP et instables ;
3. Graphes aléatoires, corps pseudo-finis sont NSOP et instables ;
4. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ n'est ni NIP, ni NSOP.

Expansions et réduits

Définition

$\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ ont le même univers. $\mathscr{N}$ est une expansion de $\mathscr{M}$ si tout ensemble définissable avec paramètre dans $\mathscr{M}$ l'est aussi dans $\mathscr{N}$.

$\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont interdéfinissables si $\mathscr{M}$ est une expansion de $\mathscr{N}$ et $\mathscr{N}$ est une expansion de $\mathscr{M}$.

Exemple

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est une expansion de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, qui est une expansion de $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Expansions NIP de $(\mathbb{Z}, +, 0)$

Soit p un nombre premier, v_p la valuation p-adique. On note $a \mid_p b$ pour $v_p(a) \leq v_p(b)$.
Une structure d'arbre sur $\mathbb{Z}$?

Théorème (Alouf-d'E.)

- $(\mathbb{Z}, +, \mid_p)$ *a l'élimination des quantificateurs dans le langage* $\{+, -, 0, 1, \mid_p, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ *;*
- $(\mathbb{Z}, +, \mid_p)$ *est* NIP*.*

$(\mathbb{Z}, +, \mid_p)$ n'est pas stable.

Expansions dp-minimales *

Il existe une notion de rang à valeurs cardinales dans les théories NIP (pas toujours bien défini), le dp-rang. Les structures de dp-rang 1 sont dites *dp-minimales*.

Exemple

$(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, $(\mathbb{Q}_p, +, \cdot, v_p)$ sont dp-minimales.

Théorème (Alouf-d'E.)

Soit P un ensemble de nombres premiers distincts.

- $(\mathbb{Z}, +, |_p)$ *est dp-minimale ;*
- $(\mathbb{Z}, +, (|_p)_{p\in P})$ *est de dp-rang* $|P|$.

Expansions minimales

Définition

Un expansion $\mathscr{N}$ de $\mathscr{M}$ est minimale si toute expansion $\mathscr{K}$ de $\mathscr{M}$ qui est un réduit de $\mathscr{N}$ est interdéfinissable avec $\mathscr{M}$ ou $\mathscr{N}$.

Exemple

- (Marker 1990) $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ est une expansion minimale de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$;
- (Conant 2016) $(\mathbb{Z}, +, <)$ est une expansion minimale de $(\mathbb{Z}, +)$.

Théorème (Alouf-d'E.)

$(\mathbb{Z}, +, |_p)$ *est une expansion minimale de* $(\mathbb{Z}, +)$.

Vers une classification des expansions dp-minimales de $(\mathbb{Z}, +, 0)$?

Il existe une classification des corps dp-minimaux (Johnson 2015).

- (Aschenbrenner, Dolich, Haskell, Macpherson, Starchenko, 2015) $(\mathbb{Z}, +, <)$ n'a pas d'expansions strictes de dp-rang fini.
- (Tran, Walsberg, 2017) $(\mathbb{Z}, +, C_\alpha)$ est dp-minimale, où C_α est un ordre cyclique irrationnel sur $\mathbb{Z}$.
  $(\mathbb{Z}, +, C_\alpha)^{\mathrm{Sh}}$ est dp-minimale et a un nombre non dénombrable de réduits distincts.

Retour sur la stabilité

Exemple

Les espaces vectoriels, les corps algébriquement clos, ont des théories stables.

Théories stables : traitement modèle théoretique des notions de « familles libres », d'éléments « génériques ».
$\Longrightarrow$ notion d'indépendance.

Une théorie axiomatique des relations d'indépendance

Soit $\mathscr{M}$ une structure, une *notion* ou *relation d'indépendance* $\downfree$ est une relation ternaire entre des parties du domaine de $\mathscr{M}$ qui satisfait des propriétés.

Exemple : Transitivité

Soient $F \subset E$, $F \subset K \subset L$. Si $E \downfree^{Id}_F K$ et $E \downfree^{Id}_K L$ alors $E \downfree^{Id}_F L$.

Théorème (Harnik-Harrington 1984)

Il existe une liste d'axiomes telle qu'une théorie est stable si et seulement si, sur tout modèle de T, il existe une relation d'indépendance satisfaisant cette liste d'axiomes.

Néostabilité « géométrique »

$$\text{Stable} \implies \text{Simple} \implies \mathrm{NSOP}_1 \implies \dots \implies \mathrm{NSOP}$$

On cherche des caractérisations géométriques des contraintes combinatoires.

Néostabilité « géométrique »

$$\underbrace{\text{Stable}}_{\text{H-H 1984}} \implies \text{Simple} \implies \mathrm{NSOP}_1 \implies \ldots \implies \mathrm{NSOP}$$

On cherche des caractérisations géométriques des contraintes combinatoires.

Néostabilité « géométrique »

$$\underbrace{\underbrace{\text{Stable}}_{\text{H-H 1984}} \implies \text{Simple}}_{\text{K-P 1996}} \implies \mathrm{NSOP}_1 \implies \ldots \implies \mathrm{NSOP}$$

On cherche des caractérisations géométriques des contraintes combinatoires.

Néostabilité « géométrique »

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\text{Stable}}_{\text{H-H 1984}} \implies \text{Simple}}_{\text{K-P 1996}} \implies \text{NSOP}_1}_{?<2016} \implies \ldots \implies \text{NSOP}$$

On cherche des caractérisations géométriques des contraintes combinatoires.

Déviation vs Kim-déviation *

Kaplan-Ramsey 2017

- On dit que $\phi(x,b)$ *Kim-divise sur A* s'il existe une extension globale A-invariante $p(x)$ de $tp(b/A)$ et $(b_i)_{i<\omega}$ telle que $b_i \models p \restriction Ab_{<i}$ et $\bigwedge_{i<\omega} \phi(x,b_i)$ est inconsistant.
- On dit que $\phi(x,b)$ *Kim-dévie sur A* si $\phi(x,b)$ implique une disjonction finie de formule qui Kim-divise sur A.
- On définit la *Kim-indépendance*

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits^K_C B \iff tp(A/BC) \text{ ne Kim-dévie pas sur } C.$$

Remarque : $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits^f \to \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits^K$.

Caractérisation géométrique de NSOP_1

Chernikov-Ramsey 2016 ; Kaplan-Ramsey 2017

Soit $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ une relation d'indépendance définie sur tout modèle de T, invariante par automorphisme.

- Symétrie.
  Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} B$ alors $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} A$.
- Monotonicité.
  Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} BD$ alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} B$.
- Existence.
  Pour tout modèle $\mathscr{M}$ et a : $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} \mathscr{M}$
- Caractère fini fort. Pour tout modèle $\mathscr{M}$, si $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} b$ alors il existe une formule $\phi(x, b, m) \in tp(a/b\mathscr{M})$ telle que pour tout a', si $a' \models \phi(x, b, m)$ alors $a' \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} b$.
- 3-amalgamation.
  Pour tout modèle $\mathscr{M}$ s'il existe c_1, c_2 et A, B tels que
  - $c_1 \equiv_{\mathscr{M}} c_2$
  - $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} B$
  - $c_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} A$ et $c_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} B$

  alors il existe $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\mathscr{M}} A, B$ tel que $c \equiv_{\mathscr{M}A} c_1$ et $c \equiv_{\mathscr{M}B} c_2$.

Caractérisation géométrique de NSOP_1

Chernikov-Ramsey 2016 ; Kaplan-Ramsey 2017

Soit $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ une relation d'indépendance définie sur tout modèle de T, invariante par automorphisme.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Symétrie.}\\ \bullet\ \text{Monotonicité.}\\ \bullet\ \text{Existence.}\\ \bullet\ \text{Caractère fini fort.}\\ \bullet\ \text{3-amalgamation.}\end{array}\right\}\mathrm{NSOP}_1\\ \bullet\ \text{Témoignage.}\end{array}\right\}\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{K}\\ \bullet\ \text{Monotonicité sur la base.}\end{array}\right\}\boxed{\text{Simple}}$$

Exemple de théories NSOP_1

(non simples)

1. (Shelah-Usvyatsof 2008) T^*_{feq}, relations d'équivalences paramétrées génériques ;
2. (Chernikov-Ramsey 2016) Corps PAC ω-libres (Chatzidakis) ; formes bilinéaires génériques sur un espace vectoriel sur un corps algébriquement clos (Granger) ;
3. (Conant-Kruckman 2017) $T_{m,n}$: graphes bipartites sans $K_{m,n}$ génériques ($m, n \geq 2$).

Structures existentiellement closes

Dans un corps algébriquement clos K, pour tout polynômes $P_i(\overline{X}), Q_j(\overline{X}) \in K[\overline{X}]$: s'il existe une extension L du corps K telle que

$$(\star) \begin{cases} P_i(\overline{X}) = 0 \\ Q_j(\overline{X}) \neq 0 \end{cases}$$

ait une solution dans L, alors, $(\star)$ a une solution dans K.

Un corps algébriquement clos est un modèle *existentiellement clos* de la théorie des corps.

Modèle-compagne

Si la classe des modèles existentiellements clos d'une théorie (*inductive**) T est axiomatisable, l'axiomatisation est appelée la *modèle-compagne* de T.

Exemple

La théorie des corps dans le langage des anneaux admet une modèle-compagne : la théorie des corps algébriquement clos ACF.

La théorie ACFG

On fixe $p > 0$ premier. $\mathbb{F}_p$ corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}_p}$ sa clôture algébrique.
Soit $\mathscr{L} = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ et $\mathscr{L}^G = \mathscr{L} \cup \{G\}$, G prédicat unaire.
Soit ACF_p^G la $\mathscr{L}^G$-theorie dont les modèles (F, H) satisfont :

- $F \models \mathrm{ACF}_p$;
- $H = G(F)$ est un sous-groupe additif de F.

Théorème

ACF_p^G *admet une modèle-compagne, on la note* ACFG.

Caractérisation géométrique de NSOP_1

Chernikov-Ramsey 2016 ; Kaplan-Ramsey 2017

Soit $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ une relation d'indépendance définie sur tout modèle de T, invariante par automorphisme.

- Symétrie.
- Monotonicité.
- Existence.
- Caractère fini fort.
- 3-amalgamation.

$\Bigg\}\ \mathrm{NSOP}_1$

- Témoignage.

$\Bigg\}\ \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{K}$

- Monotonicité sur la base.

$\Bigg\}\ \boxed{\text{Simple}}$

ACFG est NSOP_1

Indépendance faible dans ACFG

Pour A, B, C algébriquement clos, $C = A \cap B$,

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{C}^{w} B :\iff A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{C}^{ACF} B \text{ et } G(A+B) = G(A) + G(B).$$

Théorème

$\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ satisfait Symétrie, Monotonicité, Existence, Caractère fini fort, 3-amalgamation donc ACFG est NSOP_1.
Elle satisfait aussi Témoignage, donc $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ coïncide avec la Kim-indépendance au dessus des modèles.
Elle ne satisfait pas Monotonicité sur la base, donc ACFG n'est pas simple.

Une autre relation d'indépendance *

Indépendance forte dans ACFG

Pour A, B, C algébriquement clos, $C = A \cap B$,

$$A \mathop{\downarrow}_C^{st} B :\iff A \mathop{\downarrow}_C^{ACF} B \text{ et } G(\overline{AB}) = G(A) + G(B).$$

Théorème

$\downarrow^{st}$ satisfait toutes les propriétés du théorème de Kim-Pillay (96) sauf le caractère local.
$\downarrow^{st}$ est stationnaire sur les ensembles algébriquement clos.

Déviation et Monotonicité sur la base ⋆

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{wm}_{C} B :\iff \forall D \subseteq \overline{BC} \quad A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\limits^{w}_{CD} B.$$

$\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{f}$ / $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{d}$ / $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{þ}$ = relation d'indépendance de la non déviation/division/déviation épineuse.

Théorème

1. $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{wm} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{f} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{d} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{þ} \restriction K$.
2. *Soient A, B, C, D algébriquement clos, A, B, D contenant C, $B \subseteq D$.*

$$\text{si } A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{wm}_{C} B \text{ et } A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\limits^{st}_{B} D \text{ alors } A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{wm}_{C} D.$$

Expansions génériques

1. **Prédicat générique.** [Chatzidakis-Pillay 98] T $\mathscr{L}$-théorie modèle complète elimine $\exists^\infty$. La $\mathscr{L} \cup \{P\}$-theorie T, admet une modèle compagne TP. Si T est simple, TP aussi.
2. **Expansion générique par un langage arbitraire.** T $\mathscr{L}$-theorie modèle complète, $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}'$, est-ce que T en tant que $\mathscr{L}'$-theorie (incomplète) admet une modèle compagne $T_{\mathscr{L}'}$?
   - OUI : si (et seulement si) T élimine $\exists^\infty$ [Winkler 1975]
   - Si T est $NSOP_1$ alors $T_{\mathscr{L}'}$ aussi [Kruckman-Ramsey 2018]. ([Jeřábek 2018] for $T^{\emptyset}_{\mathscr{L}'}$)

Généralisation de la construction

Soit $\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}$. Soient

- T une $\mathscr{L}$-theorie modèle-complète ;
- T_0 une $\mathscr{L}_0$ théorie modèle-complète, T_0 un réduit de T ;
- $\mathscr{L}^S = \mathscr{L} \cup \{S\}$, pour S un prédicat unaire ;
- T^S la $\mathscr{L}^S$-théorie dont les modèles $(\mathscr{M}, \mathscr{M}_0)$ sont composés d'un modèle $\mathscr{M}$ de T dans lequel $S(\mathscr{M}) = \mathscr{M}_0$ est une sous $\mathscr{L}_0$-structure de $\mathscr{M}$, modèle de T_0.

La théorie T^S admet-elle une modèle-compagne ?

Généralisation de la construction

Existence d'une modèle compagne pour T^S.

Supposons que T_0 est prégéométrique modulaire, et que pour tout A infini $\mathrm{acl}_0(A) \models T_0$. Si

(H_4) pour toutes $\mathscr{L}$-formule $\phi(x, y)$, il existe une $\mathscr{L}$-formule $\theta_\phi(y)$ telle que pour tout modèle $\mathscr{M}$ de T et uplet b de $\mathscr{M}$,

$$\mathscr{M} \models \theta_\phi(b) \iff \text{il existe } \mathscr{N} \succ \mathscr{M} \text{ et } a \in \mathscr{N} \text{ tels que } \phi(a, b) \text{ et } a \text{ est un uplet indépendant sur } \mathscr{M}, \text{ au sens de la prégéométrie } \mathrm{acl}_0.$$

Alors T^S admet une modèle-compagne, on la dénote TS.

Préservation de NSOP_1

Théorème

On suppose que T est NSOP_1 et que $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$ est la Kim-indépendance au sens de T. On suppose que

$$\text{Pour tout } \mathscr{M} \models T \text{ et } A, B, C \ \mathrm{acl}_T\text{-clos contenant } \mathscr{M}, \text{ si } C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T_{\mathscr{M}} A, B \text{ et } A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T_{\mathscr{M}} B \text{ alors}$$

$$\mathrm{acl}_0\left[\mathrm{acl}_T(AC), \mathrm{acl}_T(BC)\right] \cap \mathrm{acl}_T(AB) = \mathrm{acl}_0(A, B).$$

Alors la théorie TS est NSOP_1.

$\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{w}$ et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{st}$ dans TS

À partir d'une relation d'indépendance $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}$ sur T, on définit deux relations $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{w}$ et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{st}$ sur TS.

- $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{w}$ préserve (un équivalent de) la 3-amalgamation et le Caractère fini fort ;
- $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{st}$ préserve la stationnarité et la Monotonicité sur la base.

Réduit $T_0 \subseteq T$	Expansion générique TS	Préservation
$T_0 = T$	« Paire » générique	Stabilité
$T_0 \subseteq T$	« Sous-structure » générique	NSOP_1
$T_0 = \emptyset$	Prédicat générique	Simplicité

Exemple

- **Sous-groupes additifs de corps en caractéristique $p > 0$.** L'expansion de $\mathrm{ACF}_p, \mathrm{Psf}_p, \mathrm{ACFA}_p, \mathrm{PAC}_p$ parfait ω-libre... par des sous-groupes additifs génériques existe et est NSOP_1.
- **Sous-groupe multiplicatif en toute caractéristique.** L'expansion d'un corps algébriquement clos par un sous-groupe multiplicatif générique existe et est NSOP_1.

Perspectives

- Comprendre les groupes définissables dans ACFG,...Manque d'outils dans NSOP_1, à développer ? (configuration de groupe)
- Généraliser le cas multiplicatif à toute variété semi-abélienne ? Courbes elliptique E avec $\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}$. Réciproque ?
- NSOP_1 : l'indépendance des paramètres dans le théorème d'indépendance est-elle nécessaire ou $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^a$ suffit ? Étude de PACG.
- NSOP_1 : comprendre la déviation : $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^f = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^{K^m}$?
- Une définition modèle-théorique de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^{st}$?

The end

Merci de votre attention !

L'hypothèse (H_4)

(H_4) pour toutes $\mathscr{L}$-formule $\phi(x, y)$, il existe une $\mathscr{L}$-formule $\theta_\phi(y)$ telle que pour tout modèle $\mathscr{M}$ de T et uplet b de $\mathscr{M}$,

$$\mathscr{M} \models \theta_\phi(b) \iff \text{il existe } \mathscr{N} \succ \mathscr{M} \text{ et } a \in \mathscr{N} \text{ tels que } \phi(a, b) \text{ et } a \text{ est un uplet indépendant sur } \mathscr{M}, \text{ au sens de la prégéométrie } \mathrm{acl}_0.$$

Exemple

$(Z, +, 0, 1) \succ (\mathbb{Z}, +, 0, 1)$, on considère le réduit prégéométrique $(Z, s, 0)$. Soit $\phi(x_1, x_2, y)$ la formule $x_1 - x_2 = y$. $a_1, a_2 \in Z$, sont s-indépendants si et seulement s'ils sont dans des classes archimédiennes différentes, donc si $\theta_\phi(y)$ existait, on aurait $\theta_\phi(Z) = Z \setminus \mathbb{Z}$.

Sous-groupe multiplicatif générique

Fait (Bays-Hils-Gavrilovitch 13)

$S \subseteq K$ une variété semialgébrique. $(W_t)_t$ une famille uniforme de sous-variétés irréductibles. Alors l'ensemble des t tels que W_t n'est inclu dans aucun translaté d'un sous-groupe algébrique propre de S (W_t est *libre*) est constructible.

On veut appliquer le fait avec $S = \mathbb{G}_m^n(K)$. Le point crucial :

Les sous-groupes connexes algébriques de $\mathbb{G}_m^n(K)$ sont définis par des équations de la forme $x_1^{k_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{k_n} = 1$.

Une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n(K)$ est libre si et seulement si un de ses génériques est multiplicativement indépendant sur K.

(H_4) pour des variétés semi-algébriques

Un condition « à la Mordell-Lang »

Les sous-groupes connexes algébriques de $\mathbb{G}_m^n(K)$ sont définis par des équations de la forme $x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} = 1$.

Les traces des sous-groupes algébriques connexes sur $\mathbb{G}_m^n(K)$ sont définissables dans le langage du groupe $(\mathbb{G}_m(K), \cdot)$
(« groupiquement stablement plongé »)
$\implies$ se voit dans le groupe d'endomorphisme : $\mathrm{End}(\mathbb{G}_m, \cdot) = \mathbb{Z}$.
$\implies$ $\mathrm{End}(S) = \mathbb{Z}$ si et seulement si S est « groupiquement stablement plongé » ?
$\implies$ $\mathrm{End}(S) = \mathbb{Z}$ si et seulement si

(K, S, G) a une modèle-compagne ?

Exemple (Multiplication complexe)
$E : y^2 = x^3 - x$ alors $\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$.

Une formule avec TP_1

Une formule qui divise et ne Kim-divise pas

On pose $\phi(x, yz) = x \cdot y + z \in G$. On prend n'importe quel b et c tels que $G(\overline{b}) = G(\overline{c}) = \{0\}$. Alors la formule $\phi(x, bc)$ divise : on prend $b_i c_i \equiv bc$ et $a(b_i - b) \notin G$ and $c_i - c \in G$ alors $(\phi(x, b_i c_i))_{i<\omega}$ est 2-inconsistante. Mais $b_i c_i$ n'est pas $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{w}$-indépendante. La formule ne Kim-divise pas $(G(\overline{abc}) = \langle ab + c \rangle$, on a $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{w} bc)$. Pour ce cas là $(a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{w} bc)$ on pose $d_i = b_i c_i$, puis $\overline{d}_0 = (d_i)_{i<\omega}$ et on prend $\overline{d}_i \equiv \overline{d}$ et $\overline{d}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{w} \overline{d}_0, \ldots, \overline{d}_{i-1}$. Par le théorème d'indépendance, on conclut que pour tout $\alpha : \omega \to \omega$, la suite $(\phi(x, d_{i,\alpha(i)}))_{i<\omega}$ est consistante.

Préservation de NSOP_1

Le cas des corps de caractéristique positive.

Théorème

Soit T une théorie modèle-complète et NSOP_1 de corps de caractéristique positive qui élimine le quantificateur $\exists^\infty$. Soit A, B des ensembles acl_T-clos et $E \models T$ contenu dans A et B. On suppose que :

$$\text{pour tout } A, B \text{ et } E \text{ comme au-dessus, si } A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^K_E B \text{ alors } \mathrm{acl}_T(AB) \subseteq \overline{AB}.$$

Alors, l'expansion de T par un sous-groupe additif générique existe et est NSOP_1.

ACFG n'est pas simple

Remarque sur la preuve

Remarque ($\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{w}$ ne satisfait *pas* Monotonicité sur la base)

Soit (K, G) un modèle saturé d'ACFG.

1. *Il existe a, b, c algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ tels que* $G(\overline{\mathbb{F}_p(a, b, c)}) = G(\overline{\mathbb{F}}_p) + \langle a \cdot b + c \rangle$.
2. $G(\overline{\mathbb{F}_p(a)} + \overline{\mathbb{F}_p(b, c)}) = G(\overline{\mathbb{F}_p(a)}) = G(\overline{\mathbb{F}_p(a, b)}) =$ $G(\overline{\mathbb{F}_p(b, c)}) = G(\overline{\mathbb{F}}_p)$ *et* $G(\overline{\mathbb{F}_p(a, b)} + \overline{\mathbb{F}_p(b, c)}) = G(\overline{\mathbb{F}_p}) + \langle a \cdot b + c \rangle$.
3. $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{w} b, c$ *et* $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{w}_{b} c$.

Imaginaires dans ACFG

3-amalgamation (sur les ensembles algébriquement clos)

Pour $(K, G) \models \mathrm{ACFG}$, on considère

$$\pi : K \to K/G.$$

Soit $(K, K/G)$ la structure à 2 sortes, une pour le corps K, une pour le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel K/G, et la projection canonique $\pi : K \to K/G$. Cette structure est interdéfinissable avec (K, G) donc NSOP_1. On peut décrire la Kim-indépendance dans cette structure à deux sortes.

Théorème

$(K, K/G)$ a l'élimination faible des imaginaires.

Définition de NSOP_1

Définition

Soit T une théorie et $\phi(x, y)$ une formule dans le langage de T. On dit que $\phi(x, y)$ a la propriété forte de l'ordre 1 (SOP_1) s'il existe un arbre d'uplets $(b_\eta)_{\eta \in 2^{<\omega}}$ tel que

- *pour tout $\eta \in 2^\omega$ $\{\phi(x, b_{\eta\restriction\alpha} \mid \alpha < \omega\}$ est consistant*
- *pour tout $\eta, \nu \in 2^{<\omega}$ si $\eta^\frown 0 \trianglelefteq \nu$ alors $\{\phi(x, b_\nu), \phi(x, b_{\eta^\frown 1}\}$ est inconsistant.*

Plus de propriétés pour $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$

Pour ACFG

Remarque

*En fait, toutes les propriétés satisfaites par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$ sont satisfaites sur des ensembles algébriquement clos. De plus, $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$ satisfont **Caractère fini**, **Extension** et **Transitivité**. $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ satisfait **Caractère Local** mais $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$ ne la satisfait pas. $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$ est stationnaire au dessus des ensembles algébriquement clos.*

Caractère Locale. Pour tout A denombrable et B quelconque, il existe un ensemble denombrable $B_0 \subseteq B$ tel que

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B_0} B.$$

Modèles d'ACFG

Soit $(K, G) \models \mathrm{ACFG}$.

- $K = G \cdot G$;
- pour $a \in K \setminus \mathbb{F}_p$, $K/G \cap aG \cong K/G \times K/aG$.

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et G_0 sous-groupe de $\mathbb{F}_{p^n}$ il existe $G \subset \overline{\mathbb{F}_p}$ tel que $G \cap \mathbb{F}_{p^n} = G_0$ et $(\overline{\mathbb{F}_p}, G) \models \mathrm{ACFG}$.

1. $\prod_{q \in \mathscr{U}} (\overline{\mathbb{F}}_q, G_q)$?
2. Modèles pseudo-finis de $\mathrm{Psf}\, G$.

Sous-groupes additifs génériques en caractéristique 0

Soit T une théorie inductive de corps de caractéristique 0 dans un langage $\mathscr{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1, \ldots\}$. Soit $\mathscr{L}_G = \mathscr{L} \cup \{G\}$ et T^G la $\mathscr{L}_G$-theorie des modèles de T dans lesquels G est un prédicat pour un sous-groupe additif.
Soit (K, G) un modèle existentiellement clos de T^G. Alors

$$S_K(G) := \{a \in K \mid aG \subseteq G\} = \mathbb{Z}.$$

En particulier T_G n'admet pas de modèle-compagne.

Un petit mot sur la preuve

Supposons que $\mathscr{Z} = (\mathbb{Z}, +, \dots)$ soit un réduit de $(\mathbb{Z}, +, |_p)$, expansion propre de $(\mathbb{Z}, +)$.

Étape 1 : On réduit le problème à la dimension 1.

Fait (Conant-Pillay, 2016)

$(\mathbb{Z}, +)$ n'a pas d'expansions stables propre dp-minimale.

Donc $\mathscr{Z}$ est instable.

Fait (Shelah, 1990)

Si T est instable, il existe une formule $\phi(x, y)$ avec $|x| = 1$ qui en témoigne.

Il existe une extension élémentaire $\mathscr{Z}'$ de $\mathscr{Z}$ et une formule $\phi(x, b)$ avec $|x| = 1$ telle que $\phi(\mathscr{Z}', b)$ ne soit pas définissable dans le langage du groupe.

Un petit mot sur la preuve

Il existe une extension élémentaire $\mathscr{Z}'$ de $\mathscr{Z}$ et une formule $\phi(x, b)$ avec $|x| = 1$ telle que $\phi(\mathscr{Z}', b)$ ne soit pas définissable dans le langage du groupe.

Étape 2 : On reconstruit la relation $|_p$.

Le cœur de la preuve : il existe une formule $\psi(x, z)$ du langage $\{+, 0, 1, \phi(x, y)\}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\left\{\psi(\mathbb{Z}, k) \mid k \in \mathbb{Z}^{|z|}\right\} = \{p^n\mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}.$$

On conclut puisque

$$a \mid_p b \iff a \in p^n\mathbb{Z} \to b \in p^n\mathbb{Z} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Minimalité dans les extensions élémentaire ? I

$\mathscr{M}$ est un 0-réduit de $\mathscr{N}$ si tout ensemble 0-définissable dans $\mathscr{M}$ est 0-définissable dans $\mathscr{N}$. $\mathscr{M}$ est 0-propre si $\mathscr{N}$ n'est pas un 0-réduit de $\mathscr{M}$.

Théorème

Soit $(Z, +, 0, 1, |_p) \equiv (\mathbb{Z}, +, 0, 1, |_p)$ *alors il n'existe pas de structure qui soit un* 0*-réduit* 0*-propre de* $(Z, +, 0, 1, |_p)$ *et une* 0*-expansion* 0*-propre de* $(Z, +, 0, 1)$*.*

On peut remplacer $|_p$ par $<$ dans le théorème.

Minimalité dans les extensions élémentaire ? II

Soit $(Z, +, 0, 1, <) \equiv (\mathbb{Z}, +, 0, 1, <)$ clairement

$$\mathrm{Aut}(Z, +, 0, 1, <) \subseteq \mathrm{Aut}(Z, +, 0, 1).$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(Z, +, 0, 1)$. Lasse

1. il existe un ensemble 0-définissable X de $(Z, +, 0, 1, <)$ qui n'est pas 0-définissable dans $(Z, +, 0, 1)$ tel que $\sigma X = X$;
2. pour tout ensemble 0-définissable X de $(Z, +, 0, 1, <)$, on a $\sigma X = X$;
3. $\sigma \in \mathrm{Aut}(Z, +, 0, 1, <)$.