Lemme de Schoenfield dans les degrés continus

Paul-Elliot Anglès d'Auriac
Laurent Bienvenu

10 octobre 2016

Quelques définitions

Définition

- 2^ω est l'espace de Cantor, l'espace des suites infinies de 0 et de 1,
- on le munit de la topologie engendrée par $\mathcal{U}_\sigma = \{X \in 2^\omega : X \succ \sigma\}$.
- On notera $X \leq_T Y$ pour X est calculable en Y,
- $\emptyset'$ est le problème de l'arrêt :

$$i \in \emptyset' \Leftrightarrow \text{l'exécution de l'algo } i \text{ s'arrête}$$

- Y' est le problème de l'arrêt relativisé à Y.

Lemme de Schoenfield

Théorème (Lemme de Schoenfield)

$\forall X \in 2^\omega$, *on a :*

$$X \leq_T \emptyset' \iff \exists (X_s)_s \in 2^\omega \text{ calculable telle que } X_s \to X$$

Exemple avec $X = \emptyset'$.

Théorème (Lemme de Schoenfield)

$\forall X \in 2^\omega$, *on a :*

$$X \leq_T \emptyset' \iff \exists (X_s)_s \in 2^\omega \text{ calculable telle que } X_s \to X$$

Exemple avec $X = \emptyset'$.

Théorème (Lemme de Schoenfield relativisé)

$\forall X, Y \in 2^\omega$, *on a :*

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s)_s \in 2^\omega, (X_s) \leq_T Y \text{ telle que } X_s \to X$$

Lemme de Schoenfield :

$$\forall X, Y \in 2^\omega,$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in 2^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

Conjecture de Schoenfield généralisé :

$$\forall X \in \mathscr{X}, \forall Y \in \mathscr{Y},$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in (\mathscr{X})^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

Lemme de Schoenfield :

$$\forall X, Y \in 2^\omega,$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in 2^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

Conjecture de Schoenfield généralisé :

$$\forall X \in \mathscr{X}, \forall Y \in \mathscr{Y},$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in (\mathscr{X})^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

1ère partie
Généraliser la calculabilité

Lemme de Schoenfield :

$$\forall X, Y \in 2^\omega,$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in 2^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

Conjecture de Schoenfield généralisé :

$$\forall X \in \mathscr{X}, \forall Y \in \mathscr{Y},$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in (\mathscr{X})^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

1ère partie
Généraliser la calculabilité

2ème Partie
Généraliser le jump

Lemme de Schoenfield :

$$\forall X, Y \in 2^\omega,$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in 2^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

Conjecture de Schoenfield généralisé :

3ème partie
Démontrer ou réfuter la conjecture

$$\forall X \in \mathscr{X}, \forall Y \in \mathscr{Y},$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in (\mathscr{X})^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

1ère partie
Généraliser la calculabilité

2ème Partie
Généraliser le jump

Étendre la calculabilité

Question

Comment définir la calculabilité ?

1. Pour les fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
2. Pour les fonctions $2^\omega \to 2^\omega$,
3. Dans un cadre plus général ?

Définition (Espace topologique récursif)

Un espace topologique récursif (X, τ, ν) est un espace topologique (X, τ) avec une énumération $\nu : \mathbb{N} \to \tau$ d'ouverts formant une base de τ.

Définition (Espace métrique récursif)

Un espace métrique récursif (X, d, r) est un espace métrique (X, d) avec une énumération $r : \mathbb{N} \to X$ telle que $\{r_i : i \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans X et $i, j \mapsto d(r_i, r_j)$ soit calculable.

Un cadre plus général : l'analyse calculable

Définition (Espace topologique récursif)

Un espace topologique récursif (X, τ, ν) est un espace topologique (X, τ) avec une énumération $\nu : \mathbb{N} \to \tau$ d'ouverts formant une base de τ.

Définition (Espace métrique récursif)

Un espace métrique récursif (X, d, r) est un espace métrique (X, d) avec une énumération $r : \mathbb{N} \to X$ telle que $\{r_i : i \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans X et $i, j \mapsto d(r_i, r_j)$ soit calculable.

Définition (Fonction calculable)

Soit $(\mathscr{X}, \tau_1, \nu_1)$ et $(\mathscr{Y}, \tau_2, \nu_2)$ deux espaces topologiques récursifs. Une fonction $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est dite calculable si f est continue et

$$\{(i, j) : \nu_1(i) \subseteq f^{-1}(\nu_2(j))\}$$

est récursivement énumérable.

Un cadre plus général

Maintenant, comme dans le cas de l'espace de Cantor :

1. Pour $X \in \mathscr{X}$ et $Y \in \mathscr{Y}$, $X \leq_T Y$ si il existe f calculable tel que $f(Y) = X$,
2. $X \equiv_T Y$ si $X \leq_T Y$ et $Y \leq_T X$,

Un cadre plus général

Maintenant, comme dans le cas de l'espace de Cantor :

1. Pour $X \in \mathscr{X}$ et $Y \in \mathscr{Y}$, $X \leq_T Y$ si il existe f calculable tel que $f(Y) = X$,
2. $X \equiv_T Y$ si $X \leq_T Y$ et $Y \leq_T X$,
3. Les classes d'équivalences par $\equiv_T$ d'un élément d'un espace topologique récursif sont appelées degrés d'énumération.
4. Les classes d'équivalences par $\equiv_T$ d'un élément d'un espace métrique récursif sont appelées degrés continus.
5. Les classes d'équivalences par $\equiv_T$ d'un élément de 2^ω sont appelées degrés Turing.

Question

Ces degrés sont-ils différents ?

Ouf

Théorème (Miller, 2004)

Il existe un élément x d'un espace métrique récursif tel que $\forall y \in 2^\omega,\ x \not\equiv_T y$

- Toutes les preuves utilisent un théorème de point fixe,
- Raison topologique : $[0;1]^\omega$ n'est pas de dimension topologique finie (Mathieu Hoyrup, Arno Pauly)

Lemme de Schoenfield :

$$\forall X, Y \in 2^\omega,$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in 2^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

Conjecture de Schoenfield généralisé :

3ème partie
Démontrer ou réfuter la conjecture

$$\forall X \in \mathscr{X}, \forall Y \in \mathscr{Y},$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in (\mathscr{X})^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

1ère partie
Généraliser la calculabilité

2ème Partie
Généraliser le jump

Le Jump

X', c'est :

1. Les algorithmes de code e qui s'arretent avec oracle X,

Le Jump

X', c'est :

1. Les algorithmes de code e qui s'arretent avec oracle X,
2. les fonctions calculables de code e qui prennent une valeur sur x,

Le Jump

X', c'est :

1. Les algorithmes de code e qui s'arretent avec oracle X,
2. les fonctions calculables de code e qui prennent une valeur sur x,
3. les ouverts effectifs de code e qui contiennent x.

X', c'est :

1. Les algorithmes de code e qui s'arretent avec oracle X,
2. les fonctions calculables de code e qui prennent une valeur sur x,
3. les ouverts effectifs de code e qui contiennent x.

Définition

Soit $(\mathscr{X}, \tau, \nu)$ un espace topologique récursif, et $x \in \mathscr{X}$. Alors,

$$x' = \{e : x \in \bigcup_{i \in W_e} \nu(i)\}$$

Le Jump

Définition

Soit $(\mathscr{X}, \tau, \nu)$ un espace topologique récursif, et $x \in \mathscr{X}$. Alors,

$$x' = \{e : x \in \bigcup_{i \in W_e} \nu(i)\}$$

- $X \leq_T Y \to X' \leq_T Y'$
- $X <_T X'$
- On a toujours $X' \in 2^\omega$

Lemme de Schoenfield :

$$\forall X, Y \in 2^\omega,$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in 2^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

Conjecture de Schoenfield généralisé :

3ème partie
Démontrer ou réfuter la conjecture

$$\forall X \in \mathscr{X}, \forall Y \in \mathscr{Y},$$

$$X \leq_T Y' \iff \exists (X_s) \in (\mathscr{X})^\omega, (X_s)_s \leq_T Y \text{ tel que } X_s \to X$$

1ère partie
Généraliser la calculabilité

2ème Partie
Généraliser le jump

Le lemme de Schoenfield non relativisé :

Lemme (Schoenfield dans les espaces topologiques récursifs)

Il existe un espace topologique récursif $\mathscr{T}$ tel que le lemme de Schoenfield ne soit pas vrai :

$$\exists X \leq_T \emptyset' \text{ tel qu'il n'y ait aucun } (X_s)_s \in \mathscr{T}^\omega \text{ convergeant vers } X$$

Lemme (Schoenfield dans les espaces métriques récursifs)

Pour tout espace métrique récursif $\mathscr{X}$, le lemme de Schoenfield reste vrai :

$$X \leq_T \emptyset' \Longleftrightarrow \exists (X_s)_s \in \mathscr{X}^\omega, (X_s)_s \leq_T \emptyset, X_s \to X$$

Le lemme de Schoenfield relativisé :

Lemme (Schoenfield(2^ω,$[0;1]^\omega$))

Pour $\mathscr{X} = 2^\omega$ et $\mathscr{Y} = [0;1]^\omega$ le lemme de schoenfield n'est pas vrai :

$$\exists Y \in [0;1^\omega] \text{ tel que } \forall (X_s)_s \in 2^\omega,\ (X_s)_s \leq Y,\ X_s \not\to Y'$$

Lemme (Schoenfield($[0;1]$,$\mathscr{Y}$))

Pour tout espace métrique récursif $\mathscr{Y}$, le lemme de schoenfield reste vrai : $\forall X \in [0;1], Y \in \mathscr{Y}$

Merci !