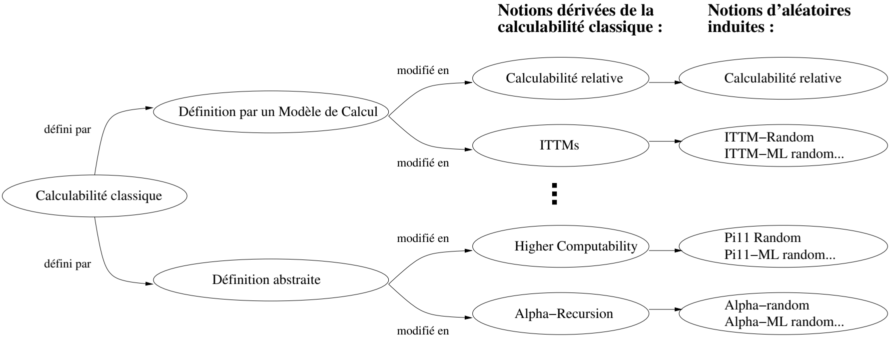
α-Recursion and Randomness

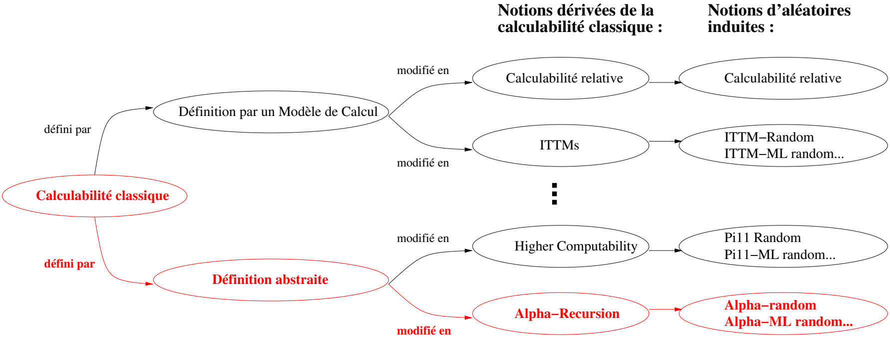
Paul-Elliot Anglès d'Auriac
Benoît Monin

7 avril 2017

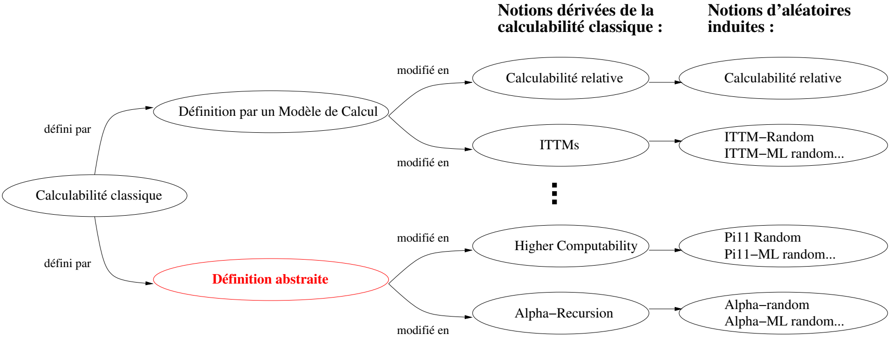
Étendre la calculabilité



Plan de l'exposé



Première étape



S'abstraire des modèles de calcul

Notons HF l'ensemble de tous les ensembles héréditairements finis.
Le théorème suivant caractérise la notion de calculable :

Théorème

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$, alors :

1. *A est calculable ssi A est Δ_1-comprehensible dans HF,*
2. *A est récursivement énumérable ssi A est Σ_1-comprehensible dans HF,*

S'abstraire des modèles de calcul

Notons HF l'ensemble de tous les ensembles héréditairements finis. Le théorème suivant caractérise la notion de calculable :

Théorème

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$, alors :

1. *A est calculable ssi A est Δ_1-comprehensible dans HF,*
2. *A est récursivement énumérable ssi A est Σ_1-comprehensible dans HF,*

1. S'étend à $A \subseteq \mathrm{HF}$;
2. Peut encore être modifié en remplaçant HF par un ensemble bien choisi.

S'abstraire des modèles de calcul

Notons HF l'ensemble de tous les ensembles héréditairements finis. Le théorème suivant caractérise la notion de calculable :

Théorème

Soit $A \subseteq \mathrm{HF}$, alors :

1. *A est calculable ssi A est Δ_1-comprehensible dans HF,*
2. *A est récursivement énumérable ssi A est Σ_1-comprehensible dans HF,*

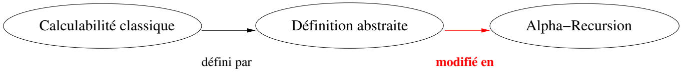
1. S'étend à $A \subseteq \mathrm{HF}$;
2. Peut encore être modifié en remplaçant HF par un ensemble bien choisi.

Théorème

Soit $A \subseteq \mathrm{HF}$, alors :

1. *A est calculable ssi A est Δ_1-comprehensible dans HF,*
2. *A est récursivement énumérable ssi A est Σ_1-comprehensible dans HF,*

Notion dérivée de la calculabilité classique :



Petit point

- On a une définition paramétrée par un ensemble ;
- pour la modifier on doit trouver les ensembles pour lesquels la définition reste intéressante ;
- on va utiliser les constructibles de Godel.

Introduction aux constructibles de Godel

$$\mathbb{N},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est pair}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est premier}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{la } n\text{-ième équation diophantienne possède une solution}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \phi(n)\} \text{ où } \phi \text{ est une formule.}$$

Remarques :

1. Y a-t-il d'autres ensembles que ceux-là ?
2. Pourrait-il y en avoir trop ?

Introduction aux constructibles de Godel

$$\mathbb{N},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est pair}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est premier}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{la } n\text{-ième équation diophantienne possède une solution}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \phi(n)\} \text{ où } \phi \text{ est une formule.}$$

Remarques :

1. Y a-t-il d'autres ensembles que ceux-là ?
   - Oui par cardinalité... Un exemple ?
2. Pourrait-il y en avoir trop ?
   - En tout cas, on peut essayer d'en garder le moins possible...

Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :
$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$
pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).

•

Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).

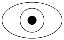
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



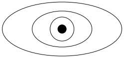
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



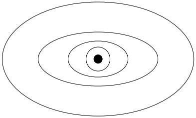
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



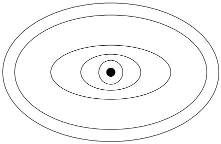
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



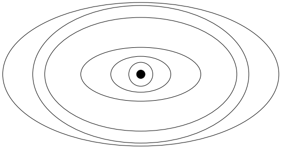
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



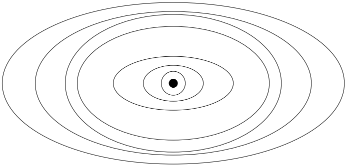
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



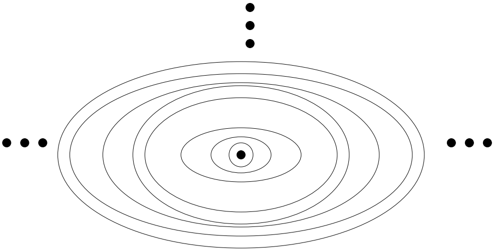
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).

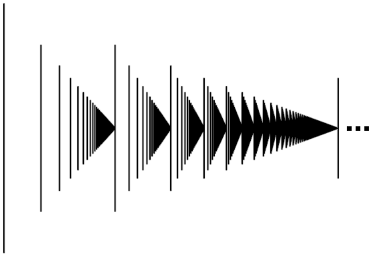


Ordinaux

Définition

Un ordinal est un ensemble α tel que

1. α est transitif : $\forall x \in \alpha, \forall y \in x, y \in \alpha$
2. α est bien ordonné par la relation d'appartenance.



- Certains ordinaux sont successeurs,
- certains ordinaux sont limites.

Une définition précise

Constructibles de Gödel (1938)

Les constructibles de Gödel au rang α, noté L_α sont définis par induction le long des ordinaux :

1. $L_0 = \emptyset$,
2. $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$,
3. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$.

Les constructibles sont les éléments de $\bigcup_\alpha L_\alpha$.

Définition

$$Def(M) = \left\{ E^M_{\phi,\bar{p}} : \phi \text{ est une formule et } \bar{p} \in M \right\}$$

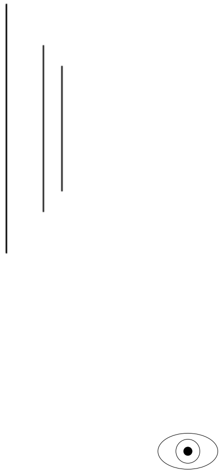
où

$$E^M_{\phi,\bar{p}} = \{x \in M : \phi(x, \bar{p}) \text{ est vrai dans } M\}$$

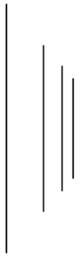
Illustration

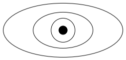
Illustration

Illustration

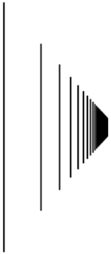


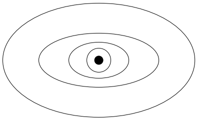
Illustration



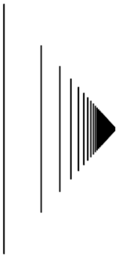


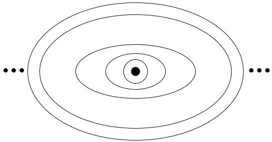
Illustration



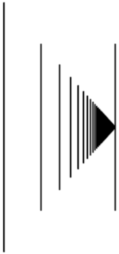


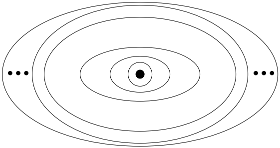
Illustration



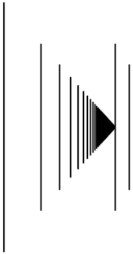


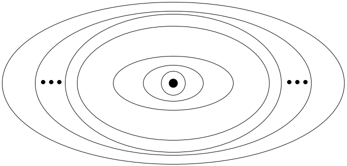
Illustration



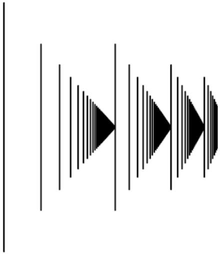


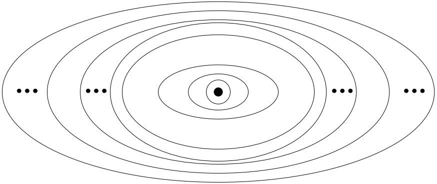
Illustration



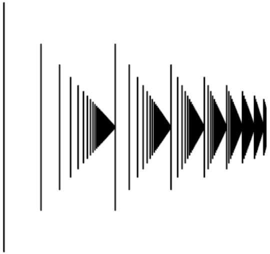


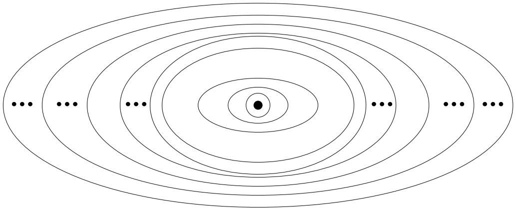
Illustration



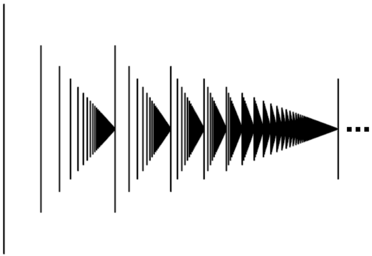


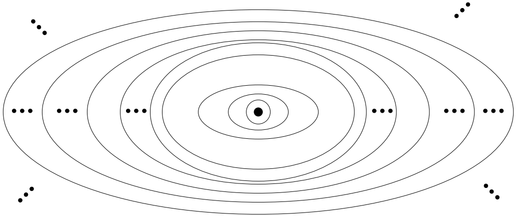
Illustration





Illustration





Exemples

Les constructibles sont donc construits par strates. Voici quelques strates :

1. $L_{n+1} = \mathcal{P}(L_n)$ pour n un entier ;
2. $L_\omega = \mathrm{HF}$, les ensembles héréditairement finis ;
3. $L_{\omega_1^{CK}} = \mathrm{HYP}$, les ensembles à code hyperarithmétique ;
4. $L_\lambda = \mathrm{WRT}$, les ensembles à code writable.

Exemples

Les constructibles sont donc construits par strates. Voici quelques strates :

1. $L_{n+1} = \mathcal{P}(L_n)$ pour n un entier ;
2. $L_\omega = \mathrm{HF}$, les ensembles héréditairement finis ;
3. $L_{\omega_1^{CK}} = \mathrm{HYP}$, les ensembles à code hyperarithmétique ;
4. $L_\lambda = \mathrm{WRT}$, les ensembles à code writable.

On retrouve HF !

Exemples

Les constructibles sont donc construits par strates. Voici quelques strates :

1. $L_{n+1} = \mathcal{P}(L_n)$ pour n un entier ;
2. $L_\omega = \mathrm{HF}$, les ensembles héréditairement finis ;
3. $L_{\omega_1^{CK}} = \mathrm{HYP}$, les ensembles à code hyperarithmétique ;
4. $L_\lambda = \mathrm{WRT}$, les ensembles à code writable.

On retrouve HF !

Théorème

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$, alors :

1. *A est calculable ssi A est Δ_1-comprehensible dans L_ω,*
2. *A est récursivement énumérable ssi A est Σ_1-comprehensible dans L_ω,*

De la calculabilité dans un espace d'ensembles

La définition de base de l'α-recursion :

Définition

Soit α un ordinal et $A \subseteq L_\alpha$. On dit que :

1. A est α-fini si $A \in L_\alpha$;
2. A est α-recursif si A est Δ_1-comprehensible dans L_α ;
3. A est α-recursivement énumérable si A est Σ_1-comprehensible dans L_α.

- Certains α se réveleront être plus intéressants que d'autres,
- A est un ensemble d'éléments α-finis, pas forcément des entiers.

Intuition

On voit un calcul comme une recherche parmi les ensembles α-finis.

Admissibilité I

Ce n'est toujours pas fini ! Car :

Remarque

Certains α se réveleront être plus intéressants que d'autres...

- Quels sont ces α ?
- Que vérifie alors L_α ?

Admissibilité I

Ce n'est toujours pas fini ! Car :

Remarque

Certains α se réveleront être plus intéressants que d'autres...

- Quels sont ces α ?
  - Les ordinaux admissibles, de la forme ω_1^X pour un $X \in 2^\omega$.
- Que vérifie alors L_α ?
  - L_α est alors admissible il vérifie les axiomes de Kripke Platek : L_α est modèle de Δ_1-compréhension et Σ_1-collection.

Admissibilité II

Définition

- Un ensemble est dit admissible s'il vérifie les axiomes de Kripke-Platek, dont les plus notables sont Δ_1-compréhension et Σ_1-collection.
- Un ordinal α est dit admissible si L_α est admissible.

- L_ω, $L_{\omega_1^{CK}}$, L_λ sont admissibles.
- Si α est admissible, l'image d'un élément α-fini par une fonction de graphe α-recursif est α-fini.

Intuition

Un ordinal α est admissible si l'α-recursion n'est pas trop éloignée de la calculabilité.

Qu'a-t-on défini ?

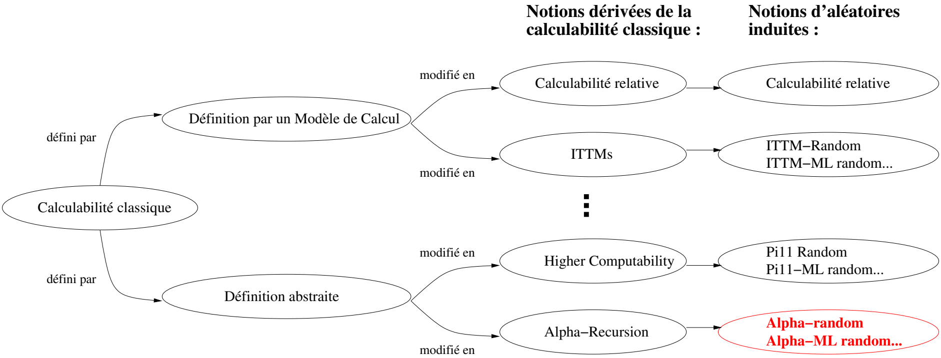
Intuition

On voit un calcul comme une recherche parmi les ensembles α-finis.

- L'ω-récursion, c'est la calculabilité classique ;
- l'ω_1^{CK}-récursion, c'est la calculabilité d'ordre supérieur ;
- la λ-récursion, c'est la calculabilité avec les Infinite Time Turing Machine...

On a donc bien une définition générale et satisfaisante de calculabilité.

Partie sur la Randomness



Définir l'aléatoire...

Une suite de bits tirés aléatoirement

0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 . . .

Il existe plusieurs paradigmes pour prétendre qu'une chaîne infinie de bits est aléatoire :

1. Impredictabilité
2. Incompressibilité des préfixes
3. Absence de propriétés exceptionnelles

Nous utiliserons le troisième paradigme.

Théorie algorithmique de l'aléatoire ?

Question

Pour $X \in 2^\omega$, que veut dire X est un ensemble aléatoire ?

Théorie algorithmique de l'aléatoire ?

Question

Pour $X \in 2^\omega$, que veut dire X est un ensemble aléatoire ?

1. Ne possède pas plus de 0 que de 1,
2. N'est pas calculable,
3. N'est pas de la forme $b_0 0 b_1 0 b_2 0 \ldots$

On définit l'aléatoire par la négative : on enlève ceux qui semblent non aléatoire.

Formellement

Paradigme

X est aléatoire si X ne possède aucune propriété exceptionnelle

Devient

Définition

X est $\mathscr{C}$-aléatoire si $\forall P \in \mathscr{C}$ tel que $\lambda(P) = 0$, $X \notin P$

Formellement

Paradigme

X est aléatoire si X ne possède aucune propriété exceptionnelle

Devient

Définition

X est $\mathscr{C}$-aléatoire si $\forall P \in \mathscr{C}$ tel que $\lambda(P) = 0$, $X \notin P$

Exemple de classes $\mathscr{C}$:

1. la classe des Π^0_2 de mesure nulle,
2. les Δ^1_1 de mesure nulle,
3. la classe des tests de Martin-Lof...

$\mathscr{C}$ dénombrable nous garantit l'existence d'un $\mathscr{C}$-random.

Martin-Lof Random

- L'aléatoire de Martin-Lof est le plus étudié.
- Il possède une définition pour chacun des trois paradigmes : imprédictabilité, incompressibilité des préfixes, et absence de propriétés exceptionnelles.

Martin-Lof Random

- L'aléatoire de Martin-Lof est le plus étudié.
- Il possède une définition pour chacun des trois paradigmes : imprédictabilité, incompressibilité des préfixes, et absence de propriétés exceptionnelles.

Définition (Tests de Martin-Lof)

Un test de Martin-Lof est une intersection de la forme $\bigcap_n \mathcal{U}_n$, où $(\mathcal{U}_n)$ est récursivement énumérable, et $\lambda(\mathcal{U}_n) \leq 2^{-n}$.

Aussi appelés Π^0_2 effectivement de mesure nulle.

Définition (Martin-Lof Random)

X est dit Martin-Lof Random si X n'appartient à aucun test de Martin-Lof.

α-randomness

Selon ce principe on définit les test dans L_α.

Définition

X est random over L_α (ou α-random) si X n'appartient à aucun borélien de mesure 0 à code dans L_α.

- ω_1^{CK}-random c'est Δ^1_1-random,
- λ-random c'est ITTM-random.

α-ML-randomness

On procède de même pour généraliser l'idée de Martin-Lof :

Définition

- Un α-ML test est un test de Martin-Lof $\mathcal{U} \subseteq \omega \times 2^{<\omega}$ qui est α-recursivement énumérable.
- X est α-ML random s'il passe tous les α-ML tests.

- ω-ML random c'est ML random,
- ω_1^{CK}-ML random c'est Π_1^1-ML random,
- λ-ML random c'est $\mathrm{ITTM}_{\mathrm{ML}}$ random

Se questionner

Question

Pour chaque α, est-ce que les notions de "α-random" et "α-ML random" sont différentes ?

Se questionner

Question

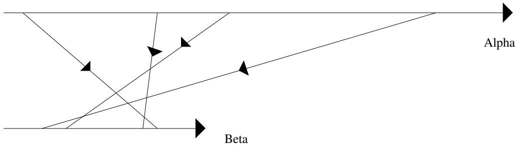
Pour chaque α, est-ce que les notions de "α-random" et "α-ML random" sont différentes ?

Théorème

Les notions de Δ_1^1-random et Π_1^1-ML random sont différentes.

Cela fournit le résultat pour un cas particulier. On voudrait trouver une condition sur α pour que ça soit vrai.

Projectum



Définition

α a un projectum dans β si il existe une fonction α-recursive injective de α dans β.

- ω_1^{CK}, λ admettent un projectum dans ω ;
- tous les ordinaux n'ont pas un un projectum plus petit qu'eux-même.

Une équivalence

Théorème

Les deux points suivants sont équivalents :

1. α *admet un projectum dans* ω*, et*
2. *Les notions* α*-random et* α*-ML random sont différentes.*

L'existence d'un projectum dans ω nous permet de ramener l'"espace" et le "temps" à une même dimension.

Corollaire

ITTM-random et ITTM-ML random sont deux notions différentes.

Conclusion

- L'α-recursion étend efficacement la calculabilité, englobant d'autres extensions ;
- elle permet de définir de nouvelles notions d'aléatoire ;
- on a une équivalence entre une propriété de théorie des ensembles et une propriété de randomness.

Merci de votre attention !