Définissabilité et calculabilité

Paul-Elliot Anglès d'Auriac,
sous la direction de B. Monin

18 janvier 2017

Quelques ensembles...

$$\mathbb{N},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est pair}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est premier}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{la } n\text{-ième équation diophantienne possède une solution}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \phi(n)\} \text{ où } \phi \text{ est une formule.}$$

Quelques ensembles...

$$\mathbb{N},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est pair}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est premier}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{la } n\text{-ième équation diophantienne possède une solution}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \phi(n)\} \text{ où } \phi \text{ est une formule.}$$

Remarques :

1. Que peut-on dire suivant la forme de ϕ ?
2. Où sont les *"autres"* ensembles ?

Quelques ensembles...

$$\mathbb{N},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est pair}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est premier}\},$$

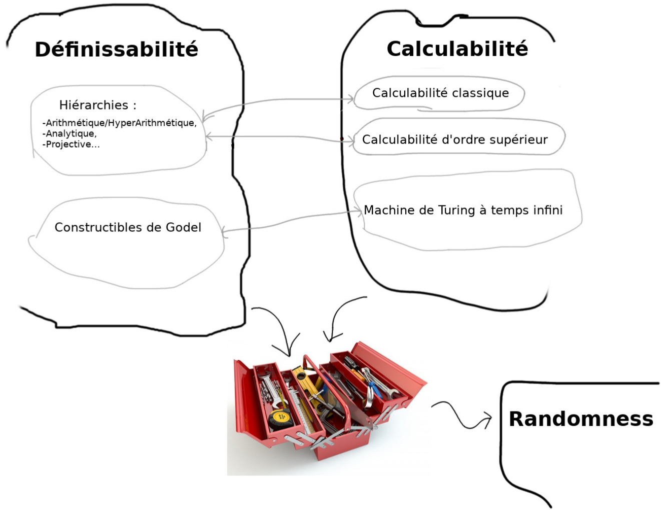
$$\{n \in \mathbb{N} : \text{la } n\text{-ième équation diophantienne possède une solution}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \phi(n)\} \text{ où } \phi \text{ est une formule.}$$

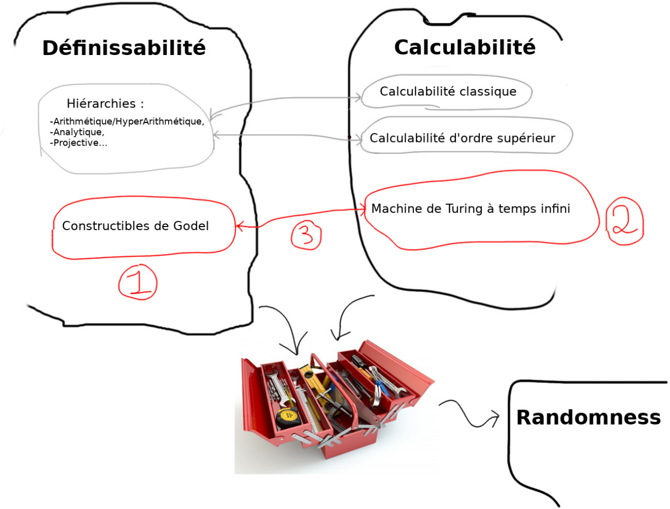
Remarques :

1. Ces ensembles sont-ils calculables ? En un oracle ?
2. Que permettent-ils de calculer ?

Structure de ma thèse



Plan de la présentation



Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :
$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$
pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).

•

Des ensembles sans superflu : stratégie

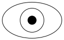
Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :
$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$
pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).

Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :
   $$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$
   pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



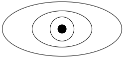
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



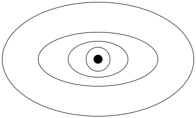
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

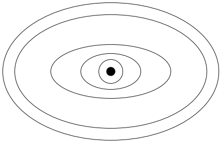
   pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :
$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$
pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).

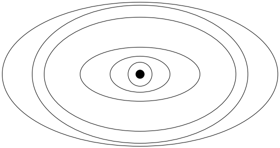


Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



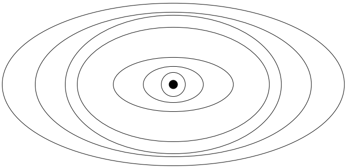
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



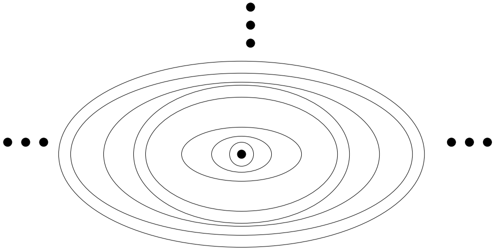
Des ensembles sans superflu : stratégie

Idée

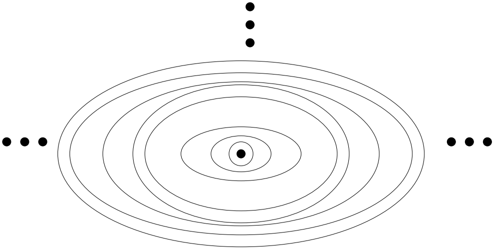
1. Si on n'a rien, on n'a pas de superflu
2. Si on a quelque chose, M, il faut qu'on ait les ensembles de la forme :

$$\{x \in M | \phi(x, p)\}$$

pour toute formule ϕ (à paramètres dans M).



Des ensembles sans superflu : stratégie



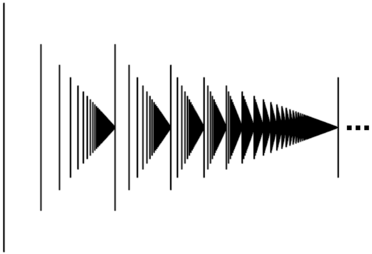
Question

- Comment ne pas s'arrêter à $\mathbb{N}$?
- Quand s'arrêter ?

Définition

Un ordinal est un ensemble α tel que

1. α est transitif : $\forall x \in \alpha, \forall y \in x, y \in \alpha$
2. α est bien ordonné par la relation d'appartenance.



- Certains ordinaux sont successeurs,
- Certains ordinaux sont limites.

Une définition précise

Constructibles de Gödel (1938)

Les constructibles de Gödel au rang α, noté L_α sont définis par induction le long des ordinaux :

1. $L_0 = \emptyset$,
2. $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$,
3. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$.

Les constructibles sont les éléments de $\bigcup_\alpha L_\alpha$.

Définition

$$Def(M) = \left\{ E^M_{\phi,\bar{p}} : \phi \text{ est une formule et } \bar{p} \in M \right\}$$

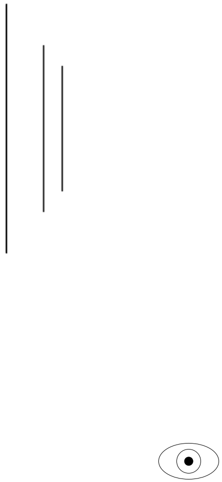
où

$$E^M_{\phi,\bar{p}} = \{x \in M : \phi(x, \bar{p}) \text{ est vrai dans } M\}$$

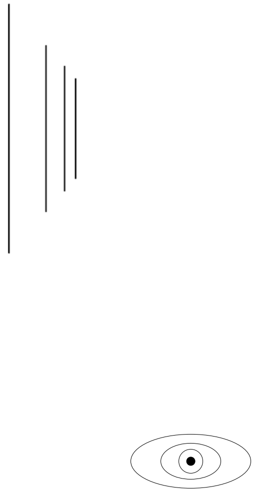
Illustration

Illustration

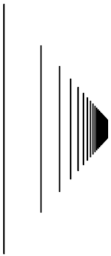
Illustration

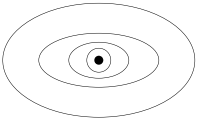


Illustration

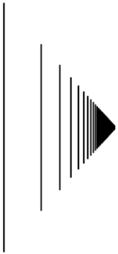


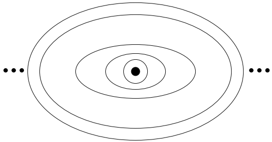
Illustration



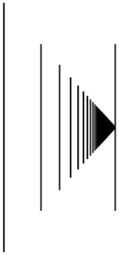


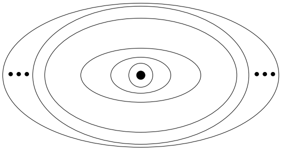
Illustration



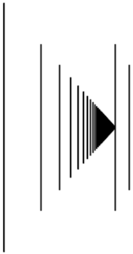


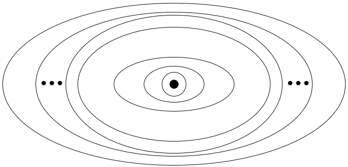
Illustration



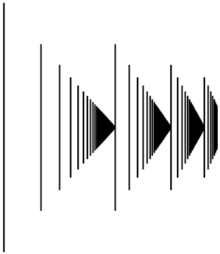


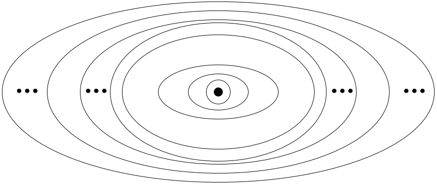
Illustration



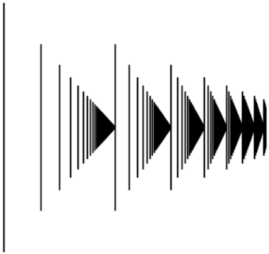


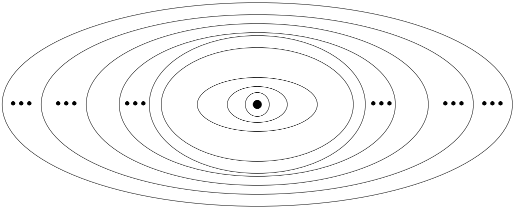
Illustration



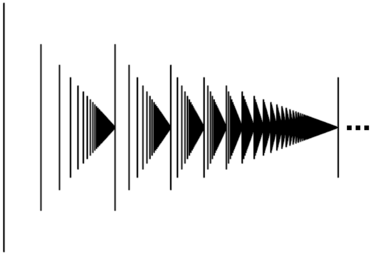


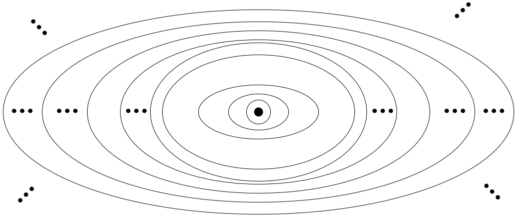
Illustration





Illustration

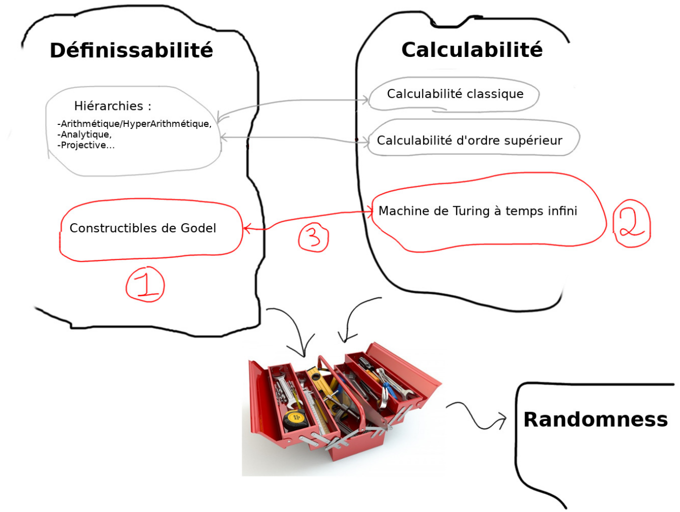




Faits sur les constructibles

- $\bigcup_\alpha L_\alpha$ est un modèle de ZFC.
- C'est le plus petit qui contient tous les ordinaux.
- L_α peut aussi être un modèle de ZFC.
- Les constructibles de Gödel sont utiles pour démontrer l'indépendance de propriétés...

Changement de partie

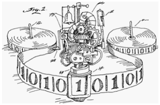


Machine de Turing à temps infini

Définition (Machine de Turing)

Une machine de Turing est un modèle abstrait de machine avec :

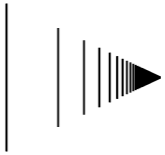
- une quantité finie d'états,
- une mémoire sous la forme de rubans infinis avec une tête de lecture,
- des transitions entre états.



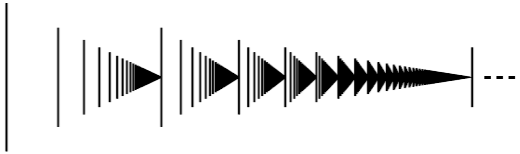
Définition (Machine de Turing à temps infini (2000))

Les machines de Turing à temps infini ont en plus un état marqué "état limite".

L'horloge d'une MT :

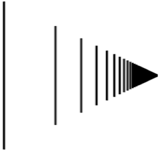


L'horloge d'une MT à temps infini :

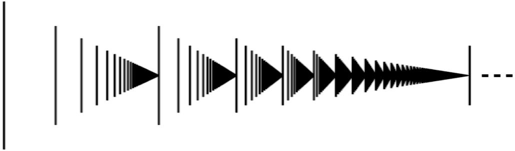


La différence

L'horloge d'une MT :



L'horloge d'une MT à temps infini :



Question

Quel comportement a la machine à une étape limite ?

Comportement

Question

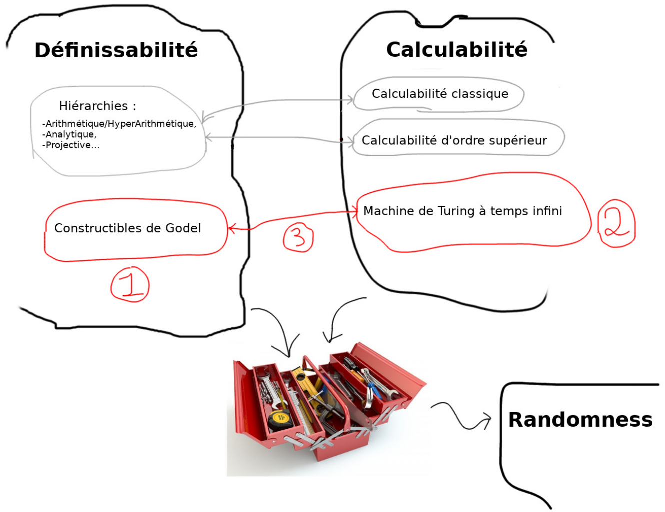
Quel comportement a la machine à une étape limite ?

Réponse

- L'état courant devient l'état particulier "limite",
- chaque cellule du ruban devient la liminf de ses valeurs précédentes.

Cellule 0 valait : 1,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,... $\rightarrow$ elle vaut 1.
Cellule 1 valait : 1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,1,... $\rightarrow$ elle vaut 0.

Changement de partie



- Est-ce que la machine a un comportement original aussi loin qu'on aille dans les ordinaux ?

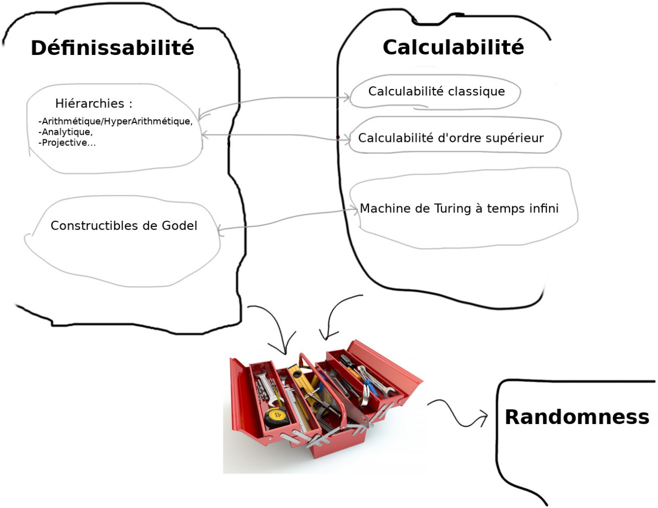
- Qu'est-ce que de telles machines peuvent calculer ? Tout ?

- Quel est l'intérêt de tout ça ?

Des liens entre Définissabilité et Calculabilité

- Est-ce que la machine a un comportement original aussi loin qu'on aille dans les ordinaux ?
  - Non, la machine ne s'arrêtera plus si elle dépasse un certain ordinal, λ, ne se stabilisera plus à partir d'un autre ordinal, ζ, et bouclera à partir d'un troisième ordinal, Σ.
- Qu'est-ce que de telles machines peuvent calculer ? Tout ?
  - Ces machines peuvent écrire sur leur ruban exactement les codes des constructibles au niveau λ !
- Quel est l'intérêt de tout ça ?
  - Les ordinaux λ, ζ et Σ ont des propriétés très intéressantes pour la théorie de la définissabilité.
  - La théorie de l'admissibilité, déjà développée, aide à étudier ces machines.

Conclusion


Définissabilité
Hiérarchies :
-Arithmétique/HyperArithmétique,
-Analytique,
-Projective...
Constructibles de Godel
Calculabilité
Calculabilité classique
Calculabilité d'ordre supérieur
Machine de Turing à temps infini
Randomness

Merci de votre attention !