Christian d'Elbée

15 décembre 2016

Résumé

0.1 Corps gauches fortement dépendants

On part des 3 faits suivants concernant le rang dp (tirés de Fact 9.2.8 de la thèse de Will Johnson) : Soient X, Y deux ensembles type-définissables non vides.

1. $dp - rk(X) > 0$ si et seulement si X est infini
2. $dp - rk(X \times Y) = dp - rk(X) + dp - rk(Y)$
3. Si on a une surjection définissable $X \to Y$ alors $dp - rk(X) \geq dp - rk(Y)$

On part donc d'un corps gauche K de dp-rang fini n et on observe ceci :

Si C est un sous corps (gauche) de K définissable infini, K est un C-module à gauche qui est d'indice inférieur ou égal à n.

C'est immédiat, car sinon on pourrais définissablement injecter dans K une copie de $C \times ... \times C$ $n+1$ fois, or ce dernier ensemble est de dp-rang $\geq n+1$. Cela résout déjà le cas où la caractéristique du corps est 0. Le centre étant définissable et infini on doit avoir que K est de dimension finie sur son centre. Pour la caractéristique positive, il reste à éliminer le cas où le centre est de cardinal fini. On a évidemment dans ce cas que $[K : Z]$ est infini. Ce que l'on veut montrer est que K doit être commutatif. Un résultat de Jacobson dit que si tout élément est algébrique sur Z fini, alors le corps K est commutatif. On doit alors avoir l'existence d'un élément a qui soit transcendant sur Z. On regarde alors le corps définissable $C(C(a))$ qui est l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments qui commuttent avec a. C'est un corps commutatif. Comme a est transcendant sur Z, et que $Z(a) \subseteq C(C(a))$, ce dernier est infini. Par le résultat en italique, on doit avoir que $C(C(a))$ est d'indice fini dans K. À présent on utilise le Fait 8.4 de la thèse de Nadja Hempel (tiré d'un livre de Lam), qui dit que précisément si K est d'indice fini sur un sous corps commutatif, alors K est d'indice fini sur son centre. On obtient donc une contradiction et le centre de K ne peut être un corps fini.
On en déduit qu'un corps interprétable dans une théorie de dp-rang fini est de dimension finie sur son centre et qu'un corps dp-minimal est commutatif.